Folgen und Reihen

Theorie

Eine (reelle) Zahlenfolge ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine (reelle) Zahl zuordnet.

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

$a(1) = 6 \cdot 1 + 7 = 13$

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

$a(1) = 6 \cdot 1 + 7 = 13$

$a(2) = 6 \cdot 2 + 7 = 19$

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

$a(1) = 6 \cdot 1 + 7 = 13$

$a(2) = 6 \cdot 2 + 7 = 19$

$a(3) = 6 \cdot 3 + 7 = 25$

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

$a(1) = 6 \cdot 1 + 7 = 13$

$a(2) = 6 \cdot 2 + 7 = 19$

$a(3) = 6 \cdot 3 + 7 = 25$

$a(4) = \ldots$

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

$a(1) = 6 \cdot 1 + 7 = 13$

$a(2) = 6 \cdot 2 + 7 = 19$

$a(3) = 6 \cdot 3 + 7 = 25$

$a(4) = \ldots$

- Statt $a(n)$ schreibt man kürzer a_n und bezeichnet damit ein einzelnes Folgeglied mit dem Index n.

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

$a(1) = 6 \cdot 1 + 7 = 13$

$a(2) = 6 \cdot 2 + 7 = 19$

$a(3) = 6 \cdot 3 + 7 = 25$

$a(4) = \ldots$

- Statt $a(n)$ schreibt man kürzer a_n und bezeichnet damit ein einzelnes Folgeglied mit dem Index n.

  Beispiel:

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

$a(1) = 6 \cdot 1 + 7 = 13$

$a(2) = 6 \cdot 2 + 7 = 19$

$a(3) = 6 \cdot 3 + 7 = 25$

$a(4) = \ldots$

- Statt $a(n)$ schreibt man kürzer a_n und bezeichnet damit ein einzelnes Folgeglied mit dem Index n.

  Beispiel: $a_5 = 37$ ist das Folgeglied mit dem Index 5.

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

$a(1) = 6 \cdot 1 + 7 = 13$

$a(2) = 6 \cdot 2 + 7 = 19$

$a(3) = 6 \cdot 3 + 7 = 25$

$a(4) = \ldots$

- Statt $a(n)$ schreibt man kürzer a_n und bezeichnet damit ein einzelnes Folgeglied mit dem Index n.

  Beispiel: $a_5 = 37$ ist das Folgeglied mit dem Index 5.
- (a_n) bezeichnet die gesamte Folge.

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

$a(1) = 6 \cdot 1 + 7 = 13$

$a(2) = 6 \cdot 2 + 7 = 19$

$a(3) = 6 \cdot 3 + 7 = 25$

$a(4) = \ldots$

- Statt $a(n)$ schreibt man kürzer a_n und bezeichnet damit ein einzelnes Folgeglied mit dem Index n.

  Beispiel: $a_5 = 37$ ist das Folgeglied mit dem Index 5.

- (a_n) bezeichnet die gesamte Folge.

  Beispiel:

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

$a(1) = 6 \cdot 1 + 7 = 13$

$a(2) = 6 \cdot 2 + 7 = 19$

$a(3) = 6 \cdot 3 + 7 = 25$

$a(4) = \ldots$

- Statt $a(n)$ schreibt man kürzer a_n und bezeichnet damit ein einzelnes Folgeglied mit dem Index n.

  Beispiel: $a_5 = 37$ ist das Folgeglied mit dem Index 5.

- (a_n) bezeichnet die gesamte Folge.

  Beispiel: $(a_n) = (13, 19, 25, 31, \ldots)$

Beispiel 1.2

$$a_n = (-2)^n$$

Beispiel 1.2

$$a_n = (-2)^n$$

$$a_1 = (-2)^1 = -2$$

Beispiel 1.2

$$a_n = (-2)^n$$

$$a_1 = (-2)^1 = -2$$

$$a_2 = (-2)^2 = 4$$

Beispiel 1.2

$$a_n = (-2)^n$$

$$a_1 = (-2)^1 = -2$$

$$a_2 = (-2)^2 = 4$$

$$a_3 = (-2)^3 = -8$$

Beispiel 1.2

$$a_n = (-2)^n$$

$$a_1 = (-2)^1 = -2$$

$$a_2 = (-2)^2 = 4$$

$$a_3 = (-2)^3 = -8$$

$$a_4 = (-2)^4 = 16$$

Beispiel 1.2

$$a_n = (-2)^n$$

$$a_1 = (-2)^1 = -2$$

$$a_2 = (-2)^2 = 4$$

$$a_3 = (-2)^3 = -8$$

$$a_4 = (-2)^4 = 16$$

$$a_5 = \dots$$

Beispiel 1.2

$$a_n = (-2)^n$$

$$a_1 = (-2)^1 = -2$$

$$a_2 = (-2)^2 = 4$$

$$a_3 = (-2)^3 = -8$$

$$a_4 = (-2)^4 = 16$$

$$a_5 = \dots$$

Eine Folge, bei der jedes Folgeglied ein anderes Vorzeichen hat als ihr Vorgänger, wird alternierende Folge genannt.

Beispiel 1.3

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

Beispiel 1.3

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2},$$

Beispiel 1.3

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{2}{3},$$

Beispiel 1.3

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{2}{3},$$

$$a_3 = \frac{3}{4},$$

Beispiel 1.3

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{2}{3},$$

$$a_3 = \frac{3}{4},$$

$$a_4 = \dots$$

Beispiel 1.3

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{2}{3},$$

$$a_3 = \frac{3}{4},$$

$$a_4 = \dots$$

Eine Folge, bei der *jedes* Folgeglied grösser [kleiner] ist als sein Vorgänger, wird *monoton wachsend* [monoton fallend] genannt.

Eine Folge (a_n) ist explizit definiert wenn sich das Folgeglied a_n direkt aus dem Index n bestimmen lässt.

Die Folgen in den Beispielen 1.1–1.3 sind explizit definiert.

Eine Folge (a_n) ist rekursiv definiert wenn sich das Folgeglied a_n aus einem Vorgänger (oder mehreren Vorgängern) bestimmen lässt und die nötige Anzahl .

Beispiel 1.4

Rekursive Definition der Folge aus Beispiel 1.1:

$a_1 = 13,\ a_{n+1} = a_n + 6$

- Der gesamte Term $n + 1$ ist tiefergestellt und bezeichnet den Index des Nachfolgers.
- Da die Rekursionsvorschrift den Wert des Nachfolgers aus dem Vorgänger berechnet, muss ein Startwert – hier a_1 – gegeben sein.

Beispiel 1.4

Rekursive Definition der Folge aus Beispiel 1.1:

$a_1 = 13,\ a_{n+1} = a_n + 6$

- Der gesamte Term $n + 1$ ist tiefergestellt und bezeichnet den Index des Nachfolgers.
- Da die Rekursionsvorschrift den Wert des Nachfolgers aus dem Vorgänger berechnet, muss ein Startwert – hier a_1 – gegeben sein.

$a_2 = a_1 + 6 = 13 + 6 = 19$

Beispiel 1.4

Rekursive Definition der Folge aus Beispiel 1.1:

$a_1 = 13,\ a_{n+1} = a_n + 6$

- Der gesamte Term $n+1$ ist tiefergestellt und bezeichnet den Index des Nachfolgers.
- Da die Rekursionsvorschrift den Wert des Nachfolgers aus dem Vorgänger berechnet, muss ein Startwert – hier a_1 – gegeben sein.

$a_2 = a_1 + 6 = 13 + 6 = 19$

$a_3 = a_2 + 6 = 19 + 6 = 25$

Beispiel 1.4

Rekursive Definition der Folge aus Beispiel 1.1:

$a_1 = 13,\ a_{n+1} = a_n + 6$

- Der gesamte Term $n+1$ ist tiefergestellt und bezeichnet den Index des Nachfolgers.
- Da die Rekursionsvorschrift den Wert des Nachfolgers aus dem Vorgänger berechnet, muss ein Startwert – hier a_1 – gegeben sein.

$a_2 = a_1 + 6 = 13 + 6 = 19$

$a_3 = a_2 + 6 = 19 + 6 = 25$

$a_4 = a_3 + 6 = 25 + 6 = 31$

Beispiel 1.4

Rekursive Definition der Folge aus Beispiel 1.1:

$a_1 = 13,\ a_{n+1} = a_n + 6$

- Der gesamte Term $n+1$ ist tiefergestellt und bezeichnet den Index des Nachfolgers.
- Da die Rekursionsvorschrift den Wert des Nachfolgers aus dem Vorgänger berechnet, muss ein Startwert – hier a_1 – gegeben sein.

$a_2 = a_1 + 6 = 13 + 6 = 19$

$a_3 = a_2 + 6 = 19 + 6 = 25$

$a_4 = a_3 + 6 = 25 + 6 = 31$

$a_5 = \ldots$

Beispiel 1.5

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

Beispiel 1.5

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Beispiel 1.5

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

Beispiel 1.5

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

$$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$$

Beispiel 1.5

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

$$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$$

$$a_5 = \dots$$

Beispiel 1.6

Die Definition kann auch von mehreren Vorgängern abhängen.

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Beispiel 1.6

Die Definition kann auch von mehreren Vorgängern abhängen.

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

Beispiel 1.6

Die Definition kann auch von mehreren Vorgängern abhängen.

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

Beispiel 1.6

Die Definition kann auch von mehreren Vorgängern abhängen.

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

Beispiel 1.6

Die Definition kann auch von mehreren Vorgängern abhängen.

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

Beispiel 1.6

Die Definition kann auch von mehreren Vorgängern abhängen.

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

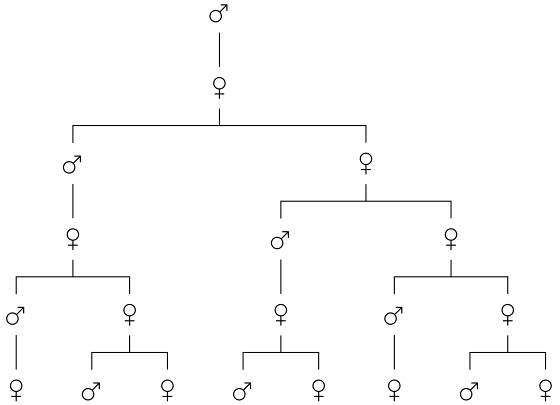
$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

$a_7 = \ldots$

Die Folge aus Beispiel 1.6 wird *Fibonacci-Folge* genannt. Mit ihr lässt sich zum Beispiel die Anzahl der Vorfahren einer Drohne in der n-ten Generation bestimmen.



(Drohnen entstehen aus den unbefruchteten Eiern einer Königin und haben daher keinen Vater.)

Die Teilsummenfolge

Ist (a_n) eine beliebige Folge, so lässt sich durch Aufsummieren der Folgeglieder von (a_n) die Teilsummenfolge (s_n) bilden:

Die Teilsummenfolge

Ist (a_n) eine beliebige Folge, so lässt sich durch Aufsummieren der Folgeglieder von (a_n) die Teilsummenfolge (s_n) bilden:

$$s_1 = a_1$$

Die Teilsummenfolge

Ist (a_n) eine beliebige Folge, so lässt sich durch Aufsummieren der Folgeglieder von (a_n) die Teilsummenfolge (s_n) bilden:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

Die Teilsummenfolge

Ist (a_n) eine beliebige Folge, so lässt sich durch Aufsummieren der Folgeglieder von (a_n) die Teilsummenfolge (s_n) bilden:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

Die Teilsummenfolge

Ist (a_n) eine beliebige Folge, so lässt sich durch Aufsummieren der Folgeglieder von (a_n) die Teilsummenfolge (s_n) bilden:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\ldots$$

Die Teilsummenfolge

Ist (a_n) eine beliebige Folge, so lässt sich durch Aufsummieren der Folgeglieder von (a_n) die Teilsummenfolge (s_n) bilden:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\ldots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Die Teilsummenfolge

Ist (a_n) eine beliebige Folge, so lässt sich durch Aufsummieren der Folgeglieder von (a_n) die Teilsummenfolge (s_n) bilden:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\ldots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Eine Teilsummenfolge wird auch Reihe genannt.

Beispiel 1.7

Ist (a_n) die Folge aus Beispiel 1.1 mit $a_1 = 13$, $a_2 = 19$, $a_3 = 25$, $a_4 = 31, \ldots,$ so lautet die Teilsummenfolge:

Beispiel 1.7

Ist (a_n) die Folge aus Beispiel 1.1 mit $a_1 = 13$, $a_2 = 19$, $a_3 = 25$, $a_4 = 31$, ..., so lautet die Teilsummenfolge:

$s_1 = 13$

Beispiel 1.7

Ist (a_n) die Folge aus Beispiel 1.1 mit $a_1 = 13$, $a_2 = 19$, $a_3 = 25$, $a_4 = 31$, ..., so lautet die Teilsummenfolge:

$s_1 = 13$

$s_2 = 13 + 19 = 32$

Beispiel 1.7

Ist (a_n) die Folge aus Beispiel 1.1 mit $a_1 = 13$, $a_2 = 19$, $a_3 = 25$, $a_4 = 31, \ldots,$ so lautet die Teilsummenfolge:

$s_1 = 13$

$s_2 = 13 + 19 = 32$

$s_3 = 13 + 19 + 25 = 57$

Beispiel 1.7

Ist (a_n) die Folge aus Beispiel 1.1 mit $a_1 = 13$, $a_2 = 19$, $a_3 = 25$, $a_4 = 31$, ..., so lautet die Teilsummenfolge:

$s_1 = 13$

$s_2 = 13 + 19 = 32$

$s_3 = 13 + 19 + 25 = 57$

$s_4 = 13 + 19 + 25 + 31 = 88$

Beispiel 1.7

Ist (a_n) die Folge aus Beispiel 1.1 mit $a_1 = 13$, $a_2 = 19$, $a_3 = 25$, $a_4 = 31, \dots,$ so lautet die Teilsummenfolge:

$$s_1 = 13$$

$$s_2 = 13 + 19 = 32$$

$$s_3 = 13 + 19 + 25 = 57$$

$$s_4 = 13 + 19 + 25 + 31 = 88$$

$$s_5 = \dots$$

Beispiel 1.8

Folge (a_n) mit $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1,\ \ldots$

Teilsummenfolge (s_n):

Beispiel 1.8

Folge (a_n) mit $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1,\ \ldots$

Teilsummenfolge (s_n):

$s_1 = 1$

Beispiel 1.8

Folge (a_n) mit $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$, ...

Teilsummenfolge (s_n):

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + (-1) = 0$

Beispiel 1.8

Folge (a_n) mit $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1,\ \ldots$

Teilsummenfolge (s_n):

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + (-1) = 0$

$s_3 = 1 + (-1) + 1 = 1$

Beispiel 1.8

Folge (a_n) mit $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1,\ \ldots$

Teilsummenfolge (s_n):

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + (-1) = 0$

$s_3 = 1 + (-1) + 1 = 1$

$s_4 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$

Beispiel 1.8

Folge (a_n) mit $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1, \ldots$

Teilsummenfolge (s_n):

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + (-1) = 0$

$s_3 = 1 + (-1) + 1 = 1$

$s_4 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$

$s_5 = \ldots$

Das Summenzeichen $\sum$ dient dazu, Summen in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

Das Summenzeichen $\sum$ dient dazu, Summen in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\sum_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5} + \underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6} + \underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

Das Summenzeichen $\sum$ dient dazu, Summen in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\sum_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5} + \underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6} + \underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

$$= 7 + 9 + 11$$

Das Summenzeichen $\sum$ dient dazu, Summen in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\sum_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5} + \underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6} + \underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

$$= 7 + 9 + 11 = 27$$

Das Summenzeichen $\sum$ dient dazu, Summen in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\sum_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5} + \underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6} + \underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

$$= 7+9+11 = 27$$

Index/Laufvariable: $i = 5,\ 6,\ 7$

Das Summenzeichen $\sum$ dient dazu, Summen in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\sum_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5} + \underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6} + \underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

$$= 7 + 9 + 11 = 27$$

Index/Laufvariable: $i = 5,\ 6,\ 7$

allgemeiner Summand: $(2i-3)$

Das Summenzeichen $\sum$ dient dazu, Summen in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\sum_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5} + \underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6} + \underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

$$= 7 + 9 + 11 = 27$$

Index/Laufvariable: $i = 5,\ 6,\ 7$

allgemeiner Summand: $(2i-3)$

(Statt i wird oft auch j oder k verwendet.)

Beispiel 2.1

$$\sum_{j=-2}^{2} j^2$$

Beispiel 2.1

$$\sum_{j=-2}^{2} j^2 = (-2)^2$$

Beispiel 2.1

$$\sum_{j=-2}^{2} j^2 = (-2)^2 + (-1)^2$$

Beispiel 2.1

$$\sum_{j=-2}^{2} j^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2$$

Beispiel 2.1

$$\sum_{j=-2}^{2} j^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2$$

Beispiel 2.1

$$\sum_{j=-2}^{2} j^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2$$

Beispiel 2.1

$$\sum_{j=-2}^{2} j^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 10$$

Beispiel 2.2

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Beispiel 2.2

$$\sum_{k=1}^{n} a_k =$$

Beispiel 2.2

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1$$

Beispiel 2.2

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2$$

Beispiel 2.2

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

Beispiel 2.2

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Beispiel 2.2

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n$$

Beispiel 2.3

$$\sum_{i=1}^{4} x$$

Beispiel 2.3

$$\sum_{i=1}^{4} x = x$$

Beispiel 2.3

$$\sum_{i=1}^{4} x = x + x$$

Beispiel 2.3

$$\sum_{i=1}^{4} x = x + x + x$$

Beispiel 2.3

$$\sum_{i=1}^{4} x = x + x + x + x$$

Beispiel 2.3

$$\sum_{i=1}^{4} x = x + x + x + x = 4x$$

Das Produktzeichen $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

Das Produktzeichen $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\prod_{i=5}^{7}(2i-3)$$

Das Produktzeichen $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\prod_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5}$$

Das Produktzeichen $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\prod_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5} \cdot \underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6}$$

Das Produktzeichen $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\prod_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5}\cdot\underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6}\cdot\underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

Das Produktzeichen $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\prod_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5}\cdot\underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6}\cdot\underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$
$$= 7\cdot 9\cdot 11$$

Das Produktzeichen $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\prod_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5}\cdot\underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6}\cdot\underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

$$= 7\cdot 9\cdot 11 = 693$$

Das Produktzeichen $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\prod_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5}\cdot\underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6}\cdot\underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

$$= 7\cdot 9\cdot 11 = 693$$

Das Produktzeichen $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\prod_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5}\cdot\underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6}\cdot\underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

$$= 7\cdot 9\cdot 11 = 693$$

Index/Laufvariable: i: 5, 6, 7

Das Produktzeichen $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

$$\prod_{i=5}^{7}(2i-3) = \underbrace{(2\cdot 5-3)}_{i=5}\cdot\underbrace{(2\cdot 6-3)}_{i=6}\cdot\underbrace{(2\cdot 7-3)}_{i=7}$$

$$= 7\cdot 9\cdot 11 = 693$$

Index/Laufvariable: i: 5, 6, 7

allgemeiner Faktor: $(2i-3)$

Beispiel 2.4

$$\prod_{i=1}^{5} i$$

Beispiel 2.4

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1$$

Beispiel 2.4

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2$$

Beispiel 2.4

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Beispiel 2.4

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Beispiel 2.4

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

Beispiel 2.4

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Beispiel 2.4

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Definition: $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ (sprich: n Fakultät)

Beispiel 2.5

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1}$$

Beispiel 2.5

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2}$$

Beispiel 2.5

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

Beispiel 2.5

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

Beispiel 2.5

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots$$

Beispiel 2.5

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99}$$

Beispiel 2.5

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100}$$

Beispiel 2.5

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{100}{101}$$

Beispiel 2.5

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

Eine arithmetische Folge (AF) ist eine Folge, bei der die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant $d \neq 0$ ist.

Eine arithmetische Folge (AF) ist eine Folge, bei der die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant $d \neq 0$ ist.

$$a_{n+1} - a_n = d \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Eine arithmetische Folge (AF) ist eine Folge, bei der die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant $d \neq 0$ ist.

$a_{n+1} - a_n = d \qquad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition:

Eine arithmetische Folge (AF) ist eine Folge, bei der die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant $d \neq 0$ ist.

$a_{n+1} - a_n = d \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Eine arithmetische Folge (AF) ist eine Folge, bei der die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant $d \neq 0$ ist.

$a_{n+1} - a_n = d \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition: $a_n = a_1 + (n-1)d$

rekursive Definition:

Eine arithmetische Folge (AF) ist eine Folge, bei der die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant $d \neq 0$ ist.

$a_{n+1} - a_n = d \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition: $a_n = a_1 + (n-1)d$

rekursive Definition: a_1; $a_{n+1} = a_n + d$

Eine arithmetische Folge (AF) ist eine Folge, bei der die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant $d \neq 0$ ist.

$a_{n+1} - a_n = d \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition: $a_n = a_1 + (n-1)d$

rekursive Definition: a_1; $a_{n+1} = a_n + d$

Fundamentum: Seite 52

Formeln, Tabellen, Begriffe: Seite 39

Beispiel 3.1

(a) $(a_n) = (3, 7, 11, 15, \dots)$

Beispiel 3.1

(a) $(a_n) = (3, 7, 11, 15, \dots)$

Beginn einer AF, denn $d = 4$ ist konstant.

Beispiel 3.1

(a) $(a_n) = (3, 7, 11, 15, \dots)$

Beginn einer AF, denn $d = 4$ ist konstant.

(b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

Beispiel 3.1

(a) $(a_n) = (3, 7, 11, 15, \dots)$

Beginn einer AF, denn $d = 4$ ist konstant.

(b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 17,\ \dots$

Beispiel 3.1

(a) $(a_n) = (3, 7, 11, 15, \dots)$

Beginn einer AF, denn $d = 4$ ist konstant.

(b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 17,\ \dots$

Keine AF, da d nicht konstant ist.

Beispiel 3.1

(a) $(a_n) = (3, 7, 11, 15, \ldots)$

Beginn einer AF, denn $d = 4$ ist konstant.

(b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 17,\ \ldots$

Keine AF, da d nicht konstant ist.

(c) $a_1 = x,\ a_2 = 2x + y,\ a_3 = 3x + 2y,\ \ldots$

Beispiel 3.1

(a) $(a_n) = (3, 7, 11, 15, \ldots)$

Beginn einer AF, denn $d = 4$ ist konstant.

(b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 17,\ \ldots$

Keine AF, da d nicht konstant ist.

(c) $a_1 = x,\ a_2 = 2x + y,\ a_3 = 3x + 2y,\ \ldots$

Beginn einer AF, denn $d = x + y$ ist konstant.

Beispiel 3.2

Gegeben: $a_n = 20 - 7n$. Bestimme a_1 und d.

Beispiel 3.2

Gegeben: $a_n = 20 - 7n$. Bestimme a_1 und d.

$a_1 = 20 - 7 \cdot 1 = 13$

Beispiel 3.2

Gegeben: $a_n = 20 - 7n$. Bestimme a_1 und d.

$a_1 = 20 - 7 \cdot 1 = 13$

$d = -7$

Beispiel 3.3

Für die AF (a_n) gilt $a_3 = 17$ und $d = 2$. Bestimme a_1, a_{10} und eine vereinfachte Form der expliziten Definition.

Beispiel 3.3

Für die AF (a_n) gilt $a_3 = 17$ und $d = 2$. Bestimme a_1, a_{10} und eine vereinfachte Form der expliziten Definition.

$a_1 = a_3 - 2d = 17 - 2 \cdot 2 = 13$

Beispiel 3.3

Für die AF (a_n) gilt $a_3 = 17$ und $d = 2$. Bestimme a_1, a_{10} und eine vereinfachte Form der expliziten Definition.

$$a_1 = a_3 - 2d = 17 - 2 \cdot 2 = 13$$

$$a_{10} = a_3 + 7d = 17 + 7 \cdot 2 = 31$$

Beispiel 3.3

Für die AF (a_n) gilt $a_3 = 17$ und $d = 2$. Bestimme a_1, a_{10} und eine vereinfachte Form der expliziten Definition.

$$a_1 = a_3 - 2d = 17 - 2 \cdot 2 = 13$$

$$a_{10} = a_3 + 7d = 17 + 7 \cdot 2 = 31$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 13 + (n-1) \cdot 2 = 13 + 2n - 2 = 11 + 2n$$

Beispiel 3.4

Für die AF (a_n) gilt $a_5 = 2$ und $a_9 = 12$. Bestimme d, a_1 und eine einfache Form der expliziten Definition.

Beispiel 3.4

Für die AF (a_n) gilt $a_5 = 2$ und $a_9 = 12$. Bestimme d, a_1 und eine einfache Form der expliziten Definition.

$$a_9 = a_5 + 4d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a_9 - a_5}{4} = \frac{12 - 2}{4} = 2.5$$

Beispiel 3.4

Für die AF (a_n) gilt $a_5 = 2$ und $a_9 = 12$. Bestimme d, a_1 und eine einfache Form der expliziten Definition.

$$a_9 = a_5 + 4d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a_9 - a_5}{4} = \frac{12 - 2}{4} = 2.5$$

$$a_1 = a_5 - 4d = 2 - 4 \cdot 2.5 = -8$$

Beispiel 3.4

Für die AF (a_n) gilt $a_5 = 2$ und $a_9 = 12$. Bestimme d, a_1 und eine einfache Form der expliziten Definition.

$$a_9 = a_5 + 4d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a_9 - a_5}{4} = \frac{12 - 2}{4} = 2.5$$

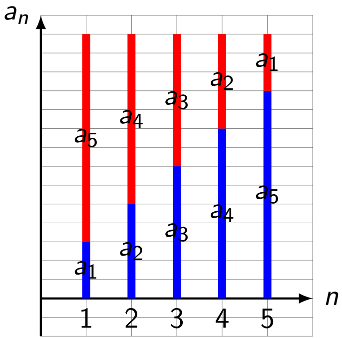
$$a_1 = a_5 - 4d = 2 - 4 \cdot 2.5 = -8$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -8 + (n-1) \cdot 2.5$$

$$= -8 + 2.5n - 2.5 = -10.5 + 2.5n$$

Beispiel 3.5

$$a_n = 3 + (n-1)\cdot 2; \qquad s_5 = \sum_{i=1}^{5} a_i = 3+5+7+9+11 = ?$$

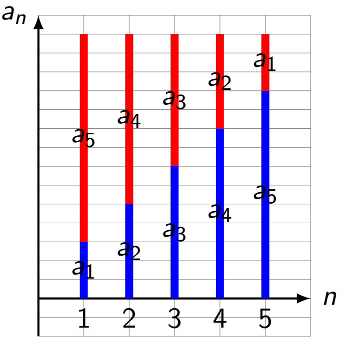


Die Summe des ersten und des letzten Folgeglieds ist gleich gross wie die Summe des zweiten und des zweitletzten Folgeglieds usw.

Der Trick: $s_5 = 5 \cdot \frac{3+11}{2} =$

Beispiel 3.5

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2; \qquad s_5 = \sum_{i=1}^{5} a_i = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = ?$$



Die Summe des ersten und des letzten Folgeglieds ist gleich gross wie die Summe des zweiten und des zweitletzten Folgeglieds usw.

Der Trick: $s_5 = 5 \cdot \dfrac{3+11}{2} = 35$

Die Summenformel der AF

Allgemein gilt für eine AF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \text{(1. Summenformel)}$$

Die Summenformel der AF

Allgemein gilt für eine AF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \text{(1. Summenformel)}$$

Substitution $a_n = a_1 + (n-1)d$:

Die Summenformel der AF

Allgemein gilt für eine AF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \text{(1. Summenformel)}$$

Substitution $a_n = a_1 + (n-1)d$:

s_n

Die Summenformel der AF

Allgemein gilt für eine AF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \text{(1. Summenformel)}$$

Substitution $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Die Summenformel der AF

Allgemein gilt für eine AF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \text{(1. Summenformel)}$$

Substitution $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}$$

Die Summenformel der AF

Allgemein gilt für eine AF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \text{(1. Summenformel)}$$

Substitution $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}$$

$$= n\left[\frac{2a_1}{2} + \frac{(n-1)d}{2}\right]$$

Die Summenformel der AF

Allgemein gilt für eine AF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \text{(1. Summenformel)}$$

Substitution $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}$$

$$= n\left[\frac{2a_1}{2} + \frac{(n-1)d}{2}\right] = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \qquad \text{(2. Summenformel)}$$

Die Summenformel der AF

Allgemein gilt für eine AF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \text{(1. Summenformel)}$$

Substitution $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}$$

$$= n\left[\frac{2a_1}{2} + \frac{(n-1)d}{2}\right] = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \qquad \text{(2. Summenformel)}$$

Fundamentum: Seite 52

Formeln, Tabellen, Begriffe: Seite 39

Beispiel 3.6

Berechne die Summe der ersten 100 Glieder der AF $a_n = 7 + 4n$.

Beispiel 3.6

Berechne die Summe der ersten 100 Glieder der AF $a_n = 7 + 4n$.

$a_1 = 11$

Beispiel 3.6

Berechne die Summe der ersten 100 Glieder der AF $a_n = 7 + 4n$.

$a_1 = 11$

$a_{100} = 407$

Beispiel 3.6

Berechne die Summe der ersten 100 Glieder der AF $a_n = 7 + 4n$.

$a_1 = 11$

$a_{100} = 407$

$n = 100$

Beispiel 3.6

Berechne die Summe der ersten 100 Glieder der AF $a_n = 7 + 4n$.

$a_1 = 11$

$a_{100} = 407$

$n = 100$

$$s_{100} = 100 \cdot \frac{11 + 407}{2}$$

Beispiel 3.6

Berechne die Summe der ersten 100 Glieder der AF $a_n = 7 + 4n$.

$a_1 = 11$

$a_{100} = 407$

$n = 100$

$$s_{100} = 100 \cdot \frac{11 + 407}{2} = 100 \cdot 209$$

Beispiel 3.6

Berechne die Summe der ersten 100 Glieder der AF $a_n = 7 + 4n$.

$a_1 = 11$

$a_{100} = 407$

$n = 100$

$$s_{100} = 100 \cdot \frac{11 + 407}{2} = 100 \cdot 209 = 20\,900$$

Beispiel 3.7

Wie gross ist die Summe aller höchstens dreistelligen (ohne Rest) durch 3 teilbaren Zahlen?

Beispiel 3.7

Wie gross ist die Summe aller höchstens dreistelligen (ohne Rest) durch 3 teilbaren Zahlen?

$s_n = 3 + 6 + 9 + \cdots + 996 + 999$

Beispiel 3.7

Wie gross ist die Summe aller höchstens dreistelligen (ohne Rest) durch 3 teilbaren Zahlen?

$s_n = 3 + 6 + 9 + \cdots + 996 + 999$

$a_1 = 3$

Beispiel 3.7

Wie gross ist die Summe aller höchstens dreistelligen (ohne Rest) durch 3 teilbaren Zahlen?

$s_n = 3 + 6 + 9 + \cdots + 996 + 999$

$a_1 = 3$

$a_n = 999$

Beispiel 3.7

Wie gross ist die Summe aller höchstens dreistelligen (ohne Rest) durch 3 teilbaren Zahlen?

$$s_n = 3 + 6 + 9 + \cdots + 996 + 999$$

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 999$$

$$n = \frac{999 - 3}{3} + 1 = 333 - 1 + 1 = 333$$

Beispiel 3.7

Wie gross ist die Summe aller höchstens dreistelligen (ohne Rest) durch 3 teilbaren Zahlen?

$$s_n = 3 + 6 + 9 + \cdots + 996 + 999$$

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 999$$

$$n = \frac{999 - 3}{3} + 1 = 333 - 1 + 1 = 333$$

$$s_{333} = 333 \cdot \frac{3 + 999}{2} = 333 \cdot 501 = 166\,833$$

Beispiel 3.8

Gegeben: AF mit $a_1 = 3$ und $s_{42} = 4431$

Gesucht: d

Beispiel 3.8

Gegeben: AF mit $a_1 = 3$ und $s_{42} = 4431$

Gesucht: d

$$s_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)d}{2} \quad \text{(2. Summenformel)}$$

Beispiel 3.8

Gegeben: AF mit $a_1 = 3$ und $s_{42} = 4431$

Gesucht: d

$$s_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)d}{2} \quad \text{(2. Summenformel)}$$

$$4431 = 42 \cdot 3 + \frac{42 \cdot 41 \cdot d}{2} \quad \| \cdot 2$$

Beispiel 3.8

Gegeben: AF mit $a_1 = 3$ und $s_{42} = 4431$

Gesucht: d

$$s_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)d}{2} \quad \text{(2. Summenformel)}$$

$$4431 = 42 \cdot 3 + \frac{42 \cdot 41 \cdot d}{2} \quad || \cdot 2$$

$$8862 = 84 \cdot 3 + 42 \cdot 41 \cdot d$$

Beispiel 3.8

Gegeben: AF mit $a_1 = 3$ und $s_{42} = 4431$

Gesucht: d

$$s_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)d}{2} \quad \text{(2. Summenformel)}$$

$$4431 = 42 \cdot 3 + \frac{42 \cdot 41 \cdot d}{2} \quad || \cdot 2$$

$$8862 = 84 \cdot 3 + 42 \cdot 41 \cdot d$$

$$8610 = 1722d$$

Beispiel 3.8

Gegeben: AF mit $a_1 = 3$ und $s_{42} = 4431$

Gesucht: d

$$s_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)d}{2} \quad \text{(2. Summenformel)}$$

$$4431 = 42 \cdot 3 + \frac{42 \cdot 41 \cdot d}{2} \quad || \cdot 2$$

$$8862 = 84 \cdot 3 + 42 \cdot 41 \cdot d$$

$$8610 = 1722d$$

$$d = 5$$

Eine geometrische Folge (GF) ist eine Folge, bei der der Quotient $q \neq 1$ aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

Eine geometrische Folge (GF) ist eine Folge, bei der der Quotient $q \neq 1$ aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

$a_{n+1} : a_n = q \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Eine geometrische Folge (GF) ist eine Folge, bei der der Quotient $q \neq 1$ aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

$a_{n+1} : a_n = q \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition:

Eine geometrische Folge (GF) ist eine Folge, bei der der Quotient $q \neq 1$ aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

$a_{n+1} : a_n = q \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Eine geometrische Folge (GF) ist eine Folge, bei der der Quotient $q \neq 1$ aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

$a_{n+1} : a_n = q \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

rekursive Definition:

Eine geometrische Folge (GF) ist eine Folge, bei der der Quotient $q \neq 1$ aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

$a_{n+1} : a_n = q \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

rekursive Definition: a_1; $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Eine geometrische Folge (GF) ist eine Folge, bei der der Quotient $q \neq 1$ aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

$a_{n+1} : a_n = q \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

rekursive Definition: $a_1;\ a_{n+1} = a_n \cdot q$

Fundamentum: Seite 53

Formeln, Tabellen, Begriffe: Seite 40

Beispiel 4.1

(a) (a_n): 7, 14, 28, 56, ...

Beispiel 4.1

(a) (a_n): 7, 14, 28, 56, ...

Beginn einer GF mit $q = 2$

Beispiel 4.1

(a) (a_n): 7, 14, 28, 56, ...

Beginn einer GF mit $q = 2$

(b) (a_n): 81, 27, 9, 3, ...

Beispiel 4.1

(a) (a_n): 7, 14, 28, 56, ...

Beginn einer GF mit $q = 2$

(b) (a_n): 81, 27, 9, 3, ...

Beginn einer GF mit $q = \frac{1}{3}$

Beispiel 4.1

(a) (a_n): 7, 14, 28, 56, ...

Beginn einer GF mit $q = 2$

(b) (a_n): 81, 27, 9, 3, ...

Beginn einer GF mit $q = \frac{1}{3}$

(c) (a_n): 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2, ...

Beispiel 4.1

(a) (a_n): 7, 14, 28, 56, ...

Beginn einer GF mit $q = 2$

(b) (a_n): 81, 27, 9, 3, ...

Beginn einer GF mit $q = \frac{1}{3}$

(c) (a_n): 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2, ...

keine GF

Beispiel 4.1

(a) (a_n): $7,\ 14,\ 28,\ 56,\ \ldots$

Beginn einer GF mit $q = 2$

(b) (a_n): $81,\ 27,\ 9,\ 3,\ \ldots$

Beginn einer GF mit $q = \frac{1}{3}$

(c) (a_n): $2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \ldots$

keine GF

(d) (a_n): $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$

Beispiel 4.1

(a) (a_n): 7, 14, 28, 56, ...

Beginn einer GF mit $q = 2$

(b) (a_n): 81, 27, 9, 3, ...

Beginn einer GF mit $q = \frac{1}{3}$

(c) (a_n): 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2, ...

keine GF

(d) (a_n): 1, -1, 1, -1, 1, ...

Beginn einer GF mit $q = -1$

Beispiel 4.2

Bestimme die explizite Definition der GF mit $a_1 = -3$ und $a_{n+1} = 2a_n$.

Beispiel 4.2

Bestimme die explizite Definition der GF mit $a_1 = -3$ und $a_{n+1} = 2a_n$.

$a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$

Beispiel 4.3

Bestimme a_7 und a_1 der GF mit $a_3 = 128$ und $q = \frac{1}{2}$.

Beispiel 4.3

Bestimme a_7 und a_1 der GF mit $a_3 = 128$ und $q = \frac{1}{2}$.

$$a_7 = a_3 \cdot q^4 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8$$

Beispiel 4.3

Bestimme a_7 und a_1 der GF mit $a_3 = 128$ und $q = \frac{1}{2}$.

$$a_7 = a_3 \cdot q^4 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8$$

a_1

Beispiel 4.3

Bestimme a_7 und a_1 der GF mit $a_3 = 128$ und $q = \frac{1}{2}$.

$$a_7 = a_3 \cdot q^4 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8$$

$$a_1 = a_3 \cdot q^{-2}$$

Beispiel 4.3

Bestimme a_7 und a_1 der GF mit $a_3 = 128$ und $q = \frac{1}{2}$.

$$a_7 = a_3 \cdot q^4 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8$$

$$a_1 = a_3 \cdot q^{-2} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Beispiel 4.3

Bestimme a_7 und a_1 der GF mit $a_3 = 128$ und $q = \frac{1}{2}$.

$$a_7 = a_3 \cdot q^4 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8$$

$$a_1 = a_3 \cdot q^{-2} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 128 \cdot 4$$

Beispiel 4.3

Bestimme a_7 und a_1 der GF mit $a_3 = 128$ und $q = \frac{1}{2}$.

$$a_7 = a_3 \cdot q^4 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8$$

$$a_1 = a_3 \cdot q^{-2} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 128 \cdot 4 = 512$$

Beispiel 4.4

Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

Beispiel 4.4

Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

$a_4 = a_1 \cdot q^3$

Beispiel 4.4

Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \frac{a_4}{a_1}$$

Beispiel 4.4

Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{13.5}{4}$$

Beispiel 4.4

Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{13.5}{4} = \frac{27}{8}$$

Beispiel 4.4

Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{13.5}{4} = \frac{27}{8}$$

q

Beispiel 4.4

Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{13.5}{4} = \frac{27}{8}$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$$

Beispiel 4.4

Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{13.5}{4} = \frac{27}{8}$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

Beispiel 4.4

Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{13.5}{4} = \frac{27}{8}$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Beispiel 4.4

Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{13.5}{4} = \frac{27}{8}$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$a_n = 4 \cdot 1.5^{n-1}$$

Beispiel 4.5

Ab welchem n sind die Glieder der GF $a_n = 3 \cdot 1.1^n$ grösser als 10^9?

Beispiel 4.5

Ab welchem n sind die Glieder der GF $a_n = 3 \cdot 1.1^n$ grösser als 10^9?

$$3 \cdot 1.1^n > 10^9 \quad || \lg$$

Beispiel 4.5

Ab welchem n sind die Glieder der GF $a_n = 3 \cdot 1.1^n$ grösser als 10^9?

$$3 \cdot 1.1^n > 10^9 \quad || \lg$$

$$\lg(3 \cdot 1.1^n) > \lg 10^9$$

Beispiel 4.5

Ab welchem n sind die Glieder der GF $a_n = 3 \cdot 1.1^n$ grösser als 10^9?

$$3 \cdot 1.1^n > 10^9 \quad || \lg$$

$$\lg(3 \cdot 1.1^n) > \lg 10^9$$

$$\lg 3 + n \lg 1.1 > 9$$

Beispiel 4.5

Ab welchem n sind die Glieder der GF $a_n = 3 \cdot 1.1^n$ grösser als 10^9?

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1.1^n &> 10^9 \quad || \lg \\ \lg(3 \cdot 1.1^n) &> \lg 10^9 \\ \lg 3 + n \lg 1.1 &> 9 \\ n &> \frac{9 - \lg 3}{\lg 1.1} \end{aligned}$$

Beispiel 4.5

Ab welchem n sind die Glieder der GF $a_n = 3 \cdot 1.1^n$ grösser als 10^9?

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1.1^n &> 10^9 \quad || \lg \\ \lg(3 \cdot 1.1^n) &> \lg 10^9 \\ \lg 3 + n \lg 1.1 &> 9 \\ n &> \frac{9 - \lg 3}{\lg 1.1} \\ n &> 205.9 \end{aligned}$$

Beispiel 4.5

Ab welchem n sind die Glieder der GF $a_n = 3 \cdot 1.1^n$ grösser als 10^9?

$$3 \cdot 1.1^n > 10^9 \quad || \lg$$

$$\lg(3 \cdot 1.1^n) > \lg 10^9$$

$$\lg 3 + n \lg 1.1 > 9$$

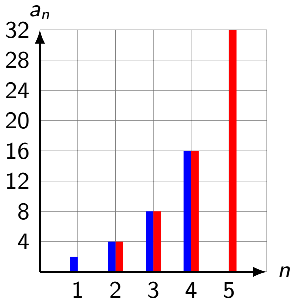
$$n > \frac{9 - \lg 3}{\lg 1.1}$$

$$n > 205.9$$

ab $n = 206$

Beispiel 4.6

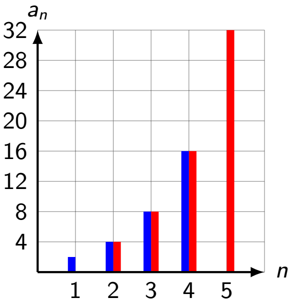
Gegeben: GF mit $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; Gesucht: $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$



$s_4 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3$

Beispiel 4.6

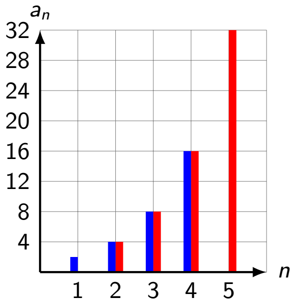
Gegeben: GF mit $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; Gesucht: $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$



$$
\begin{aligned}
s_4 &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \\
q \cdot s_4 &= \phantom{a_1 + {}} a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \\
\hline
\end{aligned}
$$

Beispiel 4.6

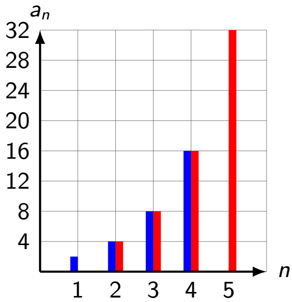
Gegeben: GF mit $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; Gesucht: $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$



$$
\begin{aligned}
s_4 &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \\
q \cdot s_4 &= \qquad a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \\
\hline
q \cdot s_4 - s_4 &= a_1 a^4 - a_1
\end{aligned}
$$

Beispiel 4.6

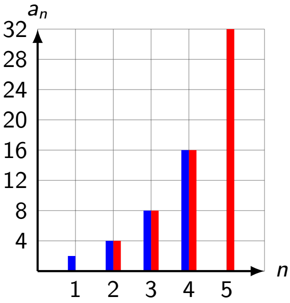
Gegeben: GF mit $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; Gesucht: $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$



$$
\begin{aligned}
s_4 &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \\
q \cdot s_4 &= \phantom{a_1 +{}} a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \\
\hline
q \cdot s_4 - s_4 &= a_1 a^4 - a_1 \\
s_4(q-1) &= a_1 q^4 - a_1 = a_1(q^4 - 1)
\end{aligned}
$$

Beispiel 4.6

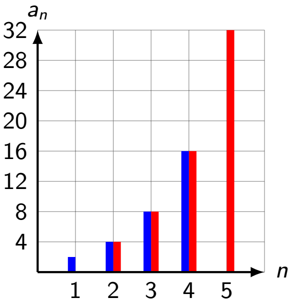
Gegeben: GF mit $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; Gesucht: $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$



$$
\begin{aligned}
s_4 &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \\
q \cdot s_4 &= \qquad\quad a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \\
\hline
q \cdot s_4 - s_4 &= a_1 a^4 - a_1 \\
s_4(q-1) &= a_1 q^4 - a_1 = a_1(q^4 - 1)
\end{aligned}
$$

Beispiel 4.6

Gegeben: GF mit $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; Gesucht: $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$



$$
\begin{aligned}
s_4 &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \\
q \cdot s_4 &= \phantom{a_1 + {}} a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 \\
\hline
q \cdot s_4 - s_4 &= a_1 a^4 - a_1 \\
s_4(q-1) &= a_1 q^4 - a_1 = a_1(q^4 - 1)
\end{aligned}
$$

Die Summenformel der GF

Allgemein gilt für eine GF:

Die Summenformel der GF

Allgemein gilt für eine GF:

s_n

Die Summenformel der GF

Allgemein gilt für eine GF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Die Summenformel der GF

Allgemein gilt für eine GF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Die Summenformel der GF

Allgemein gilt für eine GF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Die Summenformel der GF

Allgemein gilt für eine GF:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Fundamentum: Seite 53

Formeln, Tabellen, Begriffe: Seite 40