Folgen und Reihen

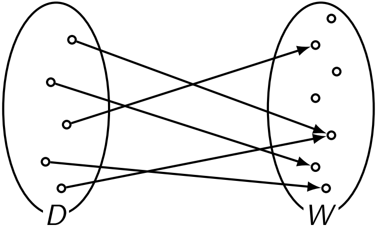
Mündliche Übungen

Aufgabe 1

Was ist eine Funktion (Abbildung)?

Aufgabe 1

Eine Funktion oder Abbildung ist eine Vorschrift, die jedem Element einer Definitionsmenge D genau ein Element einer Wertemenge W zuordnet.



Aufgabe 2

Was ist eine reelle Zahlenfolge?

Aufgabe 2

Eine reelle Zahlenfolge ist eine Funktion a, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl $a(n)$ zuordnet. Anstelle von $a(n)$ schreibt man kürzer a_n.

Aufgabe 3

Charakterisiere die explizite Definition einer Folge.

Aufgabe 3

Eine Folge (a_n) ist explizit definiert, wenn sich das n-te Folgeglied $a(n)$ bzw. a_n mit einer Formel direkt aus dem Index n berechnen lässt.

Aufgabe 3

Eine Folge (a_n) ist explizit definiert, wenn sich das n-te Folgeglied $a(n)$ bzw. a_n mit einer Formel direkt aus dem Index n berechnen lässt.

Beispiele:

- $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 5 \quad \text{(AF)}$

Aufgabe 3

Eine Folge (a_n) ist explizit definiert, wenn sich das n-te Folgeglied $a(n)$ bzw. a_n mit einer Formel direkt aus dem Index n berechnen lässt.

Beispiele:

- $a_n = 4 + (n-1) \cdot 5 \quad \text{(AF)}$
- $a_n = 3 + (-2)^{n-1} \quad \text{(GF)}$

Aufgabe 3

Eine Folge (a_n) ist explizit definiert, wenn sich das n-te Folgeglied $a(n)$ bzw. a_n mit einer Formel direkt aus dem Index n berechnen lässt.

Beispiele:

- $a_n = 4 + (n-1) \cdot 5 \quad$ (AF)
- $a_n = 3 + (-2)^{n-1} \quad$ (GF)
- $a_n = 10^n - 1 \quad$ (weder AF noch GF)

Aufgabe 4

Charakterisiere die rekursive Definition einer Folge.

Aufgabe 4

Eine Folge (a_n) ist rekursiv definiert, wenn ein oder mehrere Anfangsglieder und eine Vorschrift gegeben sind, so dass sich mit der Vorschrift alle weiteren Folgeglieder *rekursiv* aus den jeweiligen Vorgängern berechnen lassen.

Aufgabe 4

Eine Folge (a_n) ist rekursiv definiert, wenn ein oder mehrere Anfangsglieder und eine Vorschrift gegeben sind, so dass sich mit der Vorschrift alle weiteren Folgeglieder *rekursiv* aus den jeweiligen Vorgängern berechnen lassen.

Beispiele:

- $a_1 = 3;\ a_{n+1} = a_n + 5$

Aufgabe 4

Eine Folge (a_n) ist rekursiv definiert, wenn ein oder mehrere Anfangsglieder und eine Vorschrift gegeben sind, so dass sich mit der Vorschrift alle weiteren Folgeglieder *rekursiv* aus den jeweiligen Vorgängern berechnen lassen.

Beispiele:

- $a_1 = 3;\ a_{n+1} = a_n + 5$
- $a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2a_n + n$

Aufgabe 4

Eine Folge (a_n) ist rekursiv definiert, wenn ein oder mehrere Anfangsglieder und eine Vorschrift gegeben sind, so dass sich mit der Vorschrift alle weiteren Folgeglieder *rekursiv* aus den jeweiligen Vorgängern berechnen lassen.

Beispiele:

- $a_1 = 3;\ a_{n+1} = a_n + 5$
- $a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2a_n + n$
- $a_1 = 2,\ a_2 = 3;\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Aufgabe 5

Gib die rekursive Definition der Fibonacci-Folge an.

Aufgabe 5

rekursive Definition der Fibonacci-Folge:

Aufgabe 5

rekursive Definition der Fibonacci-Folge:

$a_1 = 1,$

Aufgabe 5

rekursive Definition der Fibonacci-Folge:

$a_1 = 1,\ a_2 = 1;$

Aufgabe 5

rekursive Definition der Fibonacci-Folge:

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$; $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ oder: $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

Aufgabe 6

Gib die ersten Glieder der Teilsummenfolge (s_n) der Folge (a_n) an:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 9,$$

Aufgabe 6

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 9, \quad \ldots$$

Aufgabe 6

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7, \qquad a_5 = 9, \qquad \dots$$

$$s_1 = 1,$$

Aufgabe 6

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 9, \quad \ldots$$
$$s_1 = 1, \quad s_2 = 4,$$

Aufgabe 6

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 9, \quad \dots$$
$$s_1 = 1, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = 9,$$

Aufgabe 6

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7, \qquad a_5 = 9, \qquad \ldots$$
$$s_1 = 1, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = 9, \quad s_4 = 16,$$

Aufgabe 6

$$\begin{array}{llllll} a_1 = 1, & a_2 = 3, & a_3 = 5, & a_4 = 7, & a_5 = 9, & \ldots \\ s_1 = 1, & s_2 = 4, & s_3 = 9, & s_4 = 16, & s_5 = 25, & \end{array}$$

Aufgabe 6

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 9, \quad \dots$$
$$s_1 = 1, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = 9, \quad s_4 = 16, \quad s_5 = 25, \quad \dots$$

Aufgabe 7

$$\sum_{i=5}^{11} 3 = ?$$

Aufgabe 7

$$\sum_{i=5}^{11} 3 = \underbrace{3+3+3+3+3+3+3}_{11-5+1=7\text{ Summanden}} = 7 \cdot 3 = 21$$

Aufgabe 8

$$\prod_{k=3}^{5} k = ?$$

Aufgabe 8

$$\prod_{k=3}^{5} k = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Aufgabe 9

Aus wie vielen Summanden besteht die folgende Summe?

$$2 + 3 + 4 + \cdots + 15 + 16 + 17$$

Aufgabe 9

$$2 + 3 + 4 + \cdots + 15 + 16 + 17$$

besteht aus $\dfrac{17-2}{1} + 1 = 16$ Summanden

Aufgabe 10

Aus wie vielen Summanden besteht die folgende Summe?

$$3 + 13 + 23 + \cdots + 73 + 83 + 93$$

Aufgabe 10

$$3 + 13 + 23 + \cdots + 73 + 83 + 93$$

besteht aus $\dfrac{93-3}{10} + 1 = 10$ Summanden

Aufgabe 11

Aus wie vielen Summanden besteht die folgende Summe?

$$60 + 58 + 56 + \cdots + 14 + 12 + 10$$

Aufgabe 11

$60 + 58 + 56 + \cdots + 14 + 12 + 10$

besteht aus $\dfrac{10 - 60}{-2} + 1 = \dfrac{-50}{-2} + 1 = 26$ Summanden

Aufgabe 12

Was ist eine *arithmetische Folge* (AF)?

Aufgabe 12

Eine AF ist eine Folge, bei der die Differenz d aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. Formal:

- explizit: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- rekursiv: a_1; $a_{n+1} = a_n + d$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 13

Charakterisiere die Folge (a_n):

$11, 15, 19, 23, 27, \ldots$

Aufgabe 13

Es handelt sich um eine AF mit $a_1 = 11$ und $d = 4$

oder: $a_n = 11 \cdot (n - 1) \cdot 4$

Aufgabe 14

Gib eine Summenformel für die arithmetische Folge an.

Aufgabe 14

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \text{oder} \quad s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$

Aufgabe 15

Was ist eine *geometrische Folge* (GF)?

Aufgabe 15

Eine GF ist eine Folge, bei der der Quotient q aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. Formal:

- explizit: $a_n = a_1 q^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- rekursiv: a_1; $a_{n+1} = a_n \cdot q$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 16

Charakterisiere die Folge (a_n):

$5, -10, 20, -40, 80, \ldots$

Aufgabe 16

Es handelt sich um eine (alternierende) GF mit $a_1 = 5$ und $q = -2$

oder: $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$

Aufgabe 17

Gib die Summenformel s_n für die geometrische Folge an.

Aufgabe 17

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Aufgabe 18

Wann hat die Teilsummenfolge einer geometrischen Folge einen Grenzwert und wie berechnet man ihn?

Aufgabe 18

Für $|q| < 1$ gilt $s = a_1 \cdot \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q}$