Aufgabe 1

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{2n+8}{n+5}$

$a_1 = 1.67,\ a_2 = 1.71,\ a_3 = 1.75,\ a_4 = 1.78,\ a_5 = 1.80,\ a_6 = 1.82,\ a_7 = 1.83,\ \ldots$

Vermutung: (a_n) ist monoton wachsend
Beweis: Wir zeigen, dass $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq a_n \\
\frac{2(n+1)+8}{(n+1)+5} &\geq \frac{2n+8}{n+5} \\
\frac{2n+10}{n+6} &\geq \frac{2n+8}{n+5} \\
(2n+10)(n+5) &\geq (2n+8)(n+6) \\
2n^2+20n+50 &\geq 2n^2+20n+48 \\
2 &\geq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Somit ist auch die ursprüngliche Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. □

Aufgabe 2

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_n = 10 - 2n$

$a_1 = 8,\ a_2 = 6,\ a_3 = 4,\ a_4 = 2,\ a_5 = 0,\ a_6 = -2\ \ldots$

Vermutung: (a_n) ist monoton fallend.
Beweis: Wir zeigen, dass $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\leq a_n \\
10-2(n+1) &\leq 10-2n \\
10-2n-2 &\leq 10-2n \\
-2 &\leq 0 \quad \text{gilt für alle } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Somit ist auch die ursprüngliche Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. □

Aufgabe 3

Untersuche die Folge (a_n) mit $a_n = n^2 - 10n + 20$ auf Monotonie.

$a_1 = 11,\ a_2 = 4,\ a_3 = -1,\ a_4 = -4,\ a_5 = -5,\ a_6 = -4,\ a_7 = -1,\ a_8 = 4\ \ldots$

(a_n) ist nicht monoton.

Beweis (Variante 1): Würden wir behaupten, dass die Folge monoton fallend wäre so wäre die Bedingung $a_{n+1} \leq a_n$ für $n = 5$ nicht erfüllt, denn $a_6 > a_5$.

Würden wir behaupten, dass die Folge monoton wachsend wäre, so wäre die Bedingung $a_{n+1} \geq a_n$ bereits für $n = 1$ nicht erfüllt, denn $a_2 < a_1$. □

Beweis (Variante 2): Wir behaupten zum Beispiel, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist, und zeigen, dass die dafür notwendige Bedingung $(a_{n+1} \leq a_n)$ nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n \\ (n+1)^2 - 10(n+1) - 20 &\leq n^2 - 10n + 20 \\ n^2 + 2n + 1 - 10n - 10 + 20 &\leq n^2 + 10n - 20 \\ 2n - 9 &\leq 0 \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung für $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ erfüllt aber für die $n \geq 5$ verletzt ist, ist (a_n) nicht monoton fallend. Umgekehrt ist die Ungleichung $a_{n+1} \geq a_n$ bereits für $n = 1$ nicht erfüllt, weshalb (a_n) auch nicht monoton wachsend ist. □

Aufgabe 8

Zeige, dass (a_n) mit $a_n = \dfrac{n}{3n-2}$ nach oben beschränkt ist.

$a_1 = 1,\ a_2 = 0.5,\ a_3 = 0.429,\ a_4 = 0.4,\ a_5 = 0.385,\ \ldots$

Vermutung: $K = 1$ ist eine obere Schranke von (a_n).

Beweis:
$$\begin{aligned} a_n &\leq K \\ \frac{n}{3n-2} &\leq 1 \\ n &\leq 3n - 2 \\ 0 &\leq 2n - 2 \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch die erste Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig. □

Aufgabe 9

Zeige, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$ nach unten beschränkt ist.

$a_1 = 0.0$, $a_2 = 0.2$, $a_3 = 0.2$, $a_4 = 0.176$, $a_5 = 0.154$, $\ldots$

Vermutung: $K = 0$ ist eine untere Schranke.

Beweis:

$$\begin{aligned} a_n &\geq K \\ \frac{n-1}{n^2+1} &\geq 0 \quad || \cdot (n^2+1) \\ n-1 &\geq 0 \\ n &\geq 1 \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, ist auch die erste Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. □

Aufgabe 10

Behauptung: Die Folge (a_n) mit $a_n = 2^n$ ist nicht nach oben beschränkt.

Beweis: Wir zeigen, dass für jede obere Schranke K ein Index $n_k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_{n_K} > K$ gilt.

$$\begin{aligned} a_n &> K \\ 2^n &> K \\ \log_2(2^n) &> \log_2(K) \\ n &> \log_2(K) \end{aligned}$$

Wähle für n_K irgend eine natürliche Zahl n mit $n > \log_2(K)$. □

Aufgabe 14

Vermutung: $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Beweis: Wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_ε existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

$$
\begin{aligned}
|a_n - a| &< \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ ist beliebig}) \\
\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{1}{n+1}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\
\frac{1}{\varepsilon} &< n+1 \\
\frac{1}{\varepsilon} - 1 &< n
\end{aligned}
$$

Somit gilt $\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. $\square$

Aufgabe 15

Vermutung: $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$

Beweis: Zeige, dass für jedes ε ein n_ε existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$ gilt.

$$
\begin{aligned}
|a_n - a| &< \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ ist beliebig}) \\
\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{n}{n+2} - \frac{n+2}{n+2}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{n-(n+2)}{n+2}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{-2}{n+2}\right| &< \varepsilon \\
\frac{2}{n+2} &< \varepsilon \\
\frac{2}{\varepsilon} &< n+2 \\
\frac{2}{\varepsilon} - 2 &< n
\end{aligned}
$$

Somit gilt $\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} - 2$. $\square$

Aufgabe 16

Vermutung: $a = \lim\limits_{n\to\infty} 0.7^n = 0$

Beweis: Zeige, dass für jedes ε ein n_ε existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$ gilt.

$$
\begin{aligned}
|a_n - a| &< \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ ist beliebig}) \\
|0.7^n - 0| &< \varepsilon \\
0.7^n &< \varepsilon \\
\ln(0.7^n) &< \ln(\varepsilon) \\
n \cdot \ln(0.7) &< \ln(\varepsilon) \quad || : \ln(0.7) \quad \text{Achtung: } \ln(0.7) < 0 \\
n &> \underbrace{\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(0.7)}}_{n_\varepsilon}
\end{aligned}
$$

Somit gilt $|0.7^n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon = \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(0.7)}$. $\square$