Name: ....

Dauer: 45 Minuten

Umfang: Grenzwerte von Folgen und Funktionen

Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner

Aufgabe 1 (5P)

Kreuze alle zutreffenden Eigenschaften der Folge an. Um einen Punkt zu erhalten, müssen alle Teilantworten (Kreuz/kein Kreuz) in einer Zeile richtig sein.

		monoton		
	beschränkt	wachsend	fallend	alternierend
$a_n = 1 + 0.5^n$	☐	☐	☐	☐
$b_n = n^2 - 10n$	☐	☐	☐	☐
$c_n = (-2)^n$	☐	☐	☐	☐
$d_n = \dfrac{n+2}{n+3}$	☐	☐	☐	☐
$e_n = 4 + \dfrac{(-1)^n}{n}$	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 2 (4P)

Forme den Term a_n um, bis geeignete Quotienten entstehen (wie z. B. $1/\sqrt{n}$ oder $2/n$), deren Grenzwerte direkt angegeben werden dürfen. Gib am Ende den Gesamtgrenzwert a in der Form $a_n = \ldots = \ldots \xrightarrow{n\to\infty} a$ an.

(a) $a_n = \dfrac{10n - 4n^2 + 5}{7 + 2n - 3n^2}$

(b) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$

Aufgabe 3 (4P)

Gib den Grenzwert der Folge an. Es sind keine Begründungen verlangt. Wer Zwischenschritte notiert, muss $\lim\limits_{n\to\infty}\ldots$ vor den umgeformten Term schreiben, so lange noch kein Grenzübergang durchgeführt wurde.

Für uneigentlich konvergente (= bestimmt divergente) Folgen ist ∞ oder $-\infty$ anzugeben. Bei (unbestimmt) divergenten Folgen ist „existiert nicht“ oder „Folge divergiert“ hinzuschreiben.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{9n+1}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^2}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{2n}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{4}{n}\right)^n$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+1}{2^n}$

Aufgabe 4 (6P)

Gib den Grenzwert der Funktion mit dem angegebenen Funkionsterm an, wenn das Argument x gegen x_0 strebt. Wer Zwischenschritte notiert, muss $\lim\limits_{x\to x_0} \ldots$ vor den umgeformten Term schreiben, so lange noch kein Grenzübergang durchgeführt wurde.

Für uneigentlich konvergente (= bestimmt divergente) Folgen ist ∞ oder $-\infty$ anzugeben. Bei (bestimmt) divergenten Folgen ist „existiert nicht“ oder „Folge divergiert“ hinzuschreiben.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$

(b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + 8x + 15}{x + 3}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1 - x}$

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{2x + x^2} - \dfrac{1}{2x}\right)$

Aufgabe 5 (4P)

Stelle eine Vermutung über den Grenzwert

$$a = \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n+1}$$

auf und beweise sie, indem du für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_ε angeben kannst, so dass die Ungleichung

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n > n_\varepsilon$ erfüllt ist.

Aufgabe 6 (4P)

Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe beträgt 15. Die Summe aus den Quadraten der Folgeglieder ergibt 25. Berechne a_1.