Die Exponentialfunktion

Übungen

Aufgabe 1

Der Punkt P liegt auf dem Graphen der Funktion $f: y = b^x$.
Berechne b

(a) $P(3, 8)$
(b) $P(-4, \frac{1}{81})$
(c) $P(\frac{2}{3}, 4)$
(d) $P(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$
(e) $P(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

Aufgabe 1

(a) $y = b^x$

$8 = b^3$

$b = 2$

Aufgabe 1

(a) $y = b^x$

$8 = b^3$

$b = 2$

(b) $\frac{1}{81} = b^{-4}$

$81 = b^4$

$b = 3$

(c) $$4 = b^{\frac{2}{3}}$$

$$4^3 = \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

$$64 = b^2$$

$$b = 8$$

(c) $$4 = b^{\frac{2}{3}}$$

$$4^3 = \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

$$64 = b^2$$

$$b = 8$$

(d) $$\frac{2}{3} = b^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$b = \frac{4}{9}$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{3} &= b^{-\frac{1}{3}} \\
\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} &= \left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3} \\
\left(\frac{3}{4}\right)^{3} &= b \\
b &= \frac{27}{64}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Die Punkte P und Q liegt auf dem Graphen der Funktion $f : y = ab^x$. Berechne a und b

(a) $P(-1, \frac{1}{8})$, $Q(2, 8)$

(b) $P(\frac{1}{2}, -4)$, $Q(\frac{1}{4}, -2)$

(c) $P(-2, 12)$, $Q(-3, 24)$

Aufgabe 2

(a) $\frac{1}{8} = ab^{-1} \quad (1) \qquad 8 = ab^2 \quad (2)$

Aufgabe 2

(a) $\frac{1}{8} = ab^{-1} \quad (1) \qquad 8 = ab^2 \quad (2)$

Dividiere (2) durch (1):

Aufgabe 2

(a) $\frac{1}{8} = ab^{-1} \quad (1) \qquad 8 = ab^2 \quad (2)$

Dividiere (2) durch (1):

$$8 : \frac{1}{8} = b^2 : b^{-1}$$

$$64 = b^3$$

$$b = 4$$

Aufgabe 2

(a) $\frac{1}{8} = ab^{-1} \quad (1) \qquad 8 = ab^2 \quad (2)$

Dividiere (2) durch (1):

$$8 : \frac{1}{8} = b^2 : b^{-1}$$

$$64 = b^3$$

$$b = 4$$

Setze $b = 4$ z. B. in (1) ein:

Aufgabe 2

(a) $\frac{1}{8} = ab^{-1} \quad (1) \qquad 8 = ab^2 \quad (2)$

Dividiere (2) durch (1):

$$8 : \frac{1}{8} = b^2 : b^{-1}$$

$$64 = b^3$$

$$b = 4$$

Setze $b = 4$ z. B. in (1) ein:

$$8 = a \cdot 16$$

$$a = \frac{1}{2}$$

(b) $-4 = ab^{\frac{1}{2}} \quad (1) \qquad -2 = ab^{\frac{1}{4}} \quad (2)$

(b) $-4 = ab^{\frac{1}{2}} \quad (1) \qquad -2 = ab^{\frac{1}{4}} \quad (2)$

Dividiere (1) durch (2):

(b) $-4 = ab^{\frac{1}{2}} \quad (1) \qquad -2 = ab^{\frac{1}{4}} \quad (2)$

Dividiere (1) durch (2):

$$\frac{-4}{-2} = \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{ab^{\frac{1}{4}}}$$

$$2 = b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$2 = b^{\frac{1}{4}}$$

$$b = 16$$

(b) $-4 = ab^{\frac{1}{2}} \quad (1) \qquad -2 = ab^{\frac{1}{4}} \quad (2)$

Dividiere (1) durch (2):

$$\frac{-4}{-2} = \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{ab^{\frac{1}{4}}}$$

$$2 = b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$2 = b^{\frac{1}{4}}$$

$$b = 16$$

Setze $b = 16$ z. B. in (1) ein:

(b) $-4 = ab^{\frac{1}{2}} \quad (1) \qquad -2 = ab^{\frac{1}{4}} \quad (2)$

Dividiere (1) durch (2):

$$\frac{-4}{-2} = \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{ab^{\frac{1}{4}}}$$

$$2 = b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$2 = b^{\frac{1}{4}}$$

$$b = 16$$

Setze $b = 16$ z. B. in (1) ein:

$$-4 = a \cdot 16^{\frac{1}{2}}$$

$$-4 = 4a$$

$$a = -1$$

(c) $12 = ab^{-2} \quad (1) \qquad 24 = ab^{-3} \quad (2)$

(c) $12 = ab^{-2} \quad (1) \qquad 24 = ab^{-3} \quad (2)$

Dividiere (1) durch (2):

(c) $12 = ab^{-2} \quad (1) \qquad 24 = ab^{-3} \quad (2)$

Dividiere (1) durch (2):

$$\frac{12}{24} = \frac{ab^{-2}}{ab^{-3}}$$

$$\frac{1}{2} = b^{-2-(-3)} = b^{1}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

(c) $12 = ab^{-2} \quad (1) \qquad 24 = ab^{-3} \quad (2)$

Dividiere (1) durch (2):

$$\frac{12}{24} = \frac{ab^{-2}}{ab^{-3}}$$

$$\frac{1}{2} = b^{-2-(-3)} = b^{1}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Setze $b = \frac{1}{2}$ z. B. in (1) ein:

(c) $12 = ab^{-2} \quad (1) \qquad 24 = ab^{-3} \quad (2)$

Dividiere (1) durch (2):

$$\frac{12}{24} = \frac{ab^{-2}}{ab^{-3}}$$

$$\frac{1}{2} = b^{-2-(-3)} = b^{1}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Setze $b = \frac{1}{2}$ z. B. in (1) ein:

$$12 = a\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$12 = a \cdot 2^{2}$$

$$a = 3$$

Aufgabe 3

Skizziere in einem Koordinatensystem das kleinste Gebiet, in dem alle Kurven der Form $y = b^x$ mit $b \in M$ liegen:

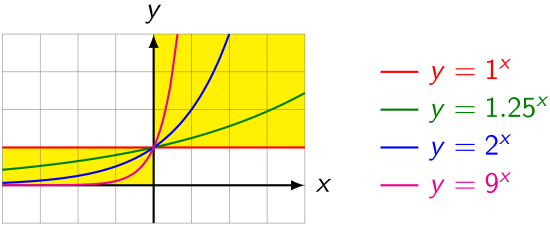
(a) $M = \{b \in \mathbb{R} \colon b \geq 1\}$

(b) $M = \{b \in \mathbb{R} \colon 0 < b \leq 1\}$

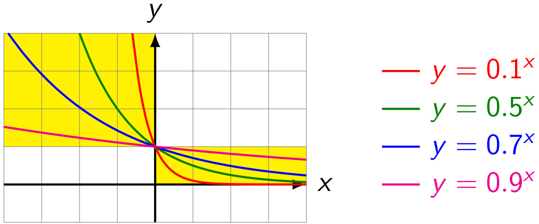
(c) $M = \{b \in \mathbb{R} \colon \frac{1}{2} < b \leq 2\}$

Aufgabe 3

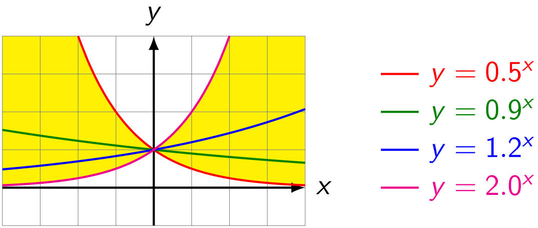
(a) $M = \{b \in \mathbb{R} \colon b \geq 1\}$



(b) $M = \{b \in \mathbb{R} \colon 0 < b \leq 1\}$



(c) $M = \{b \in \mathbb{R} \colon \frac{1}{2} < b \leq 2\}$



Aufgabe 4

Der Graph der Funktion $f: y = 2^x$ wird transformiert. Zeichne die Original- und die Bildkurve ins gleiche Koordinatesystem und gib die Funktionsgleichung der Bildkurve an.

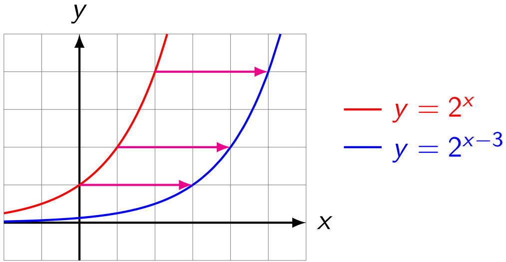
(a) Translation um 3 Einheiten in positive x-Richtung

(b) Achsenspiegelung an der y-Achse

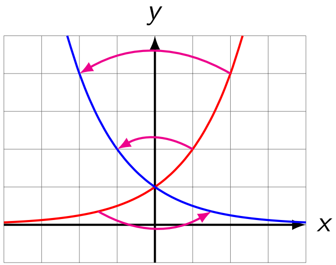
(c) Axiale Streckung senkrecht zur x-Achse mit dem Faktor $k = 0.5$

Aufgabe 4

(a) Translation um 3 Einheiten in positive x-Richtung



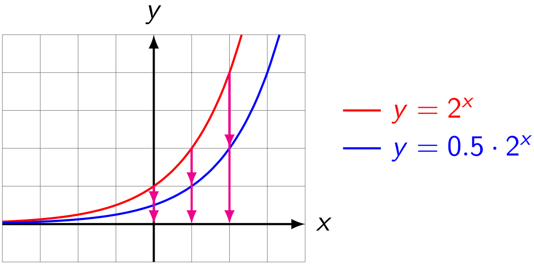
(b) Achsenspiegelung an der y-Achse



— $y = 2^x$

— $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(c) Axiale Streckung senkrecht zur x-Achse mit dem Faktor $k = 0.5$



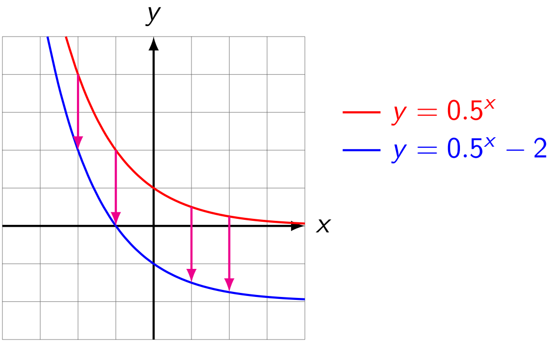
Aufgabe 5

Der Graph der Funktion $f: y = 0.5^x$ wird transformiert. Zeichne die Original- und die Bildkurve ins gleiche Koordinatesystem und gib die Funktionsgleichung der Bildkurve an.

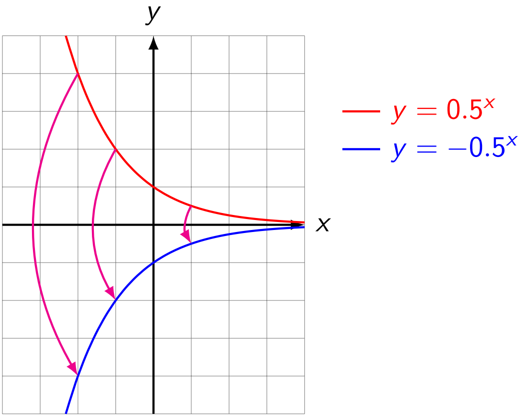
(a) Translation um 2 Einheiten in negative y-Richtung
(b) Achsenspiegelung an der x-Achse
(c) Axiale Streckung senkrecht zur y-Achse mit dem Faktor $k = 2$

Aufgabe 5

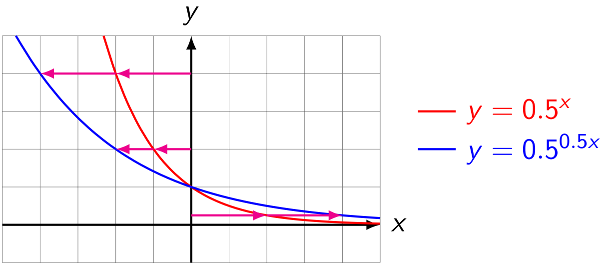
(a) Translation um 2 Einheiten in negative y-Richtung



(b) Achsenspiegelung an der x-Achse



(c) Axiale Streckung senkrecht zur y-Achse mit dem Faktor $k = 2$



Aufgabe 6

Der Graph der Funktion $f: y = 2^x$ wird transformiert. Zeichne die Original- und die Bildkurve ins gleiche Koordinatesystem und gib die Funktionsgleichung der Bildkurve an.

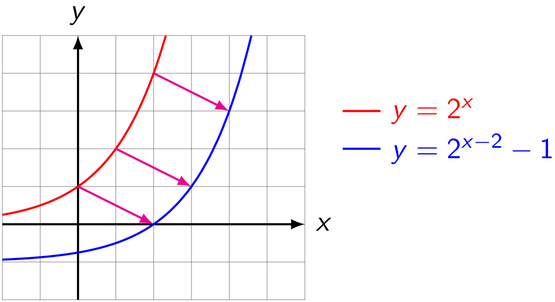
(a) Translation um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) Punktspiegelung am Ursprung

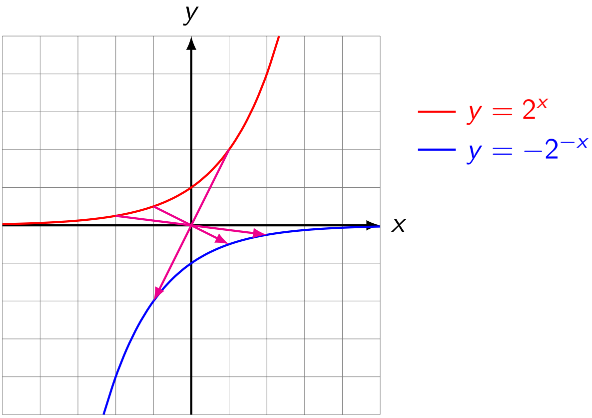
(c) Zentrische Streckung am Ursprung mit dem Faktor $k = 2$

Aufgabe 6

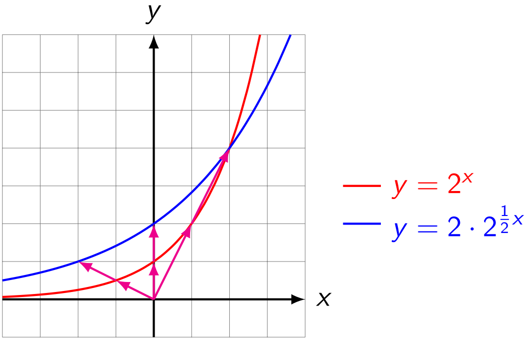
(a) Translation um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\begin{array}{l} x \to x - 2 \\ y \to y - 1 \end{array}$



(b) Punktspiegelung am Ursprung: $x \to \frac{1}{2}x$, $y \to \frac{1}{2}y$



(c) Zentrische Streckung am Ursprung mit dem Faktor $k = 2$:
$x \to \frac{1}{2}x$, $y \to \frac{1}{2}y$



Aufgabe 7*

Der Graph der Funktion $f: y = 2^x$ wird transformiert. Gib die Funktionsgleichung der Bildkurve an. (ohne Skizze)

(a) axiale Spiegelung an der Geraden $y = 2$

(b) axiale Streckung an der Geraden $x = -1$ mit dem Faktor 2

Hinweis: Verschiebe das Koordinatensystem so, dass die entsprechende Koordinatenachse mit dazu parallelen Achse zusammenfällt. Führe anschliessend die Spiegelung an der Koordinatenachse aus und mache die Verschiebung wieder rückgängig.

Aufgabe 7*

(a) Das Koordinatensystem verschieben, so dass die x-Achse ($y = 0$) mit $y = 2$ zusammenfällt:

Aufgabe 7*

(a) Das Koordinatensystem verschieben, so dass die x-Achse ($y = 0$) mit $y = 2$ zusammenfällt:

$y \to y + 2$: $y + 2 = 2^x$

Aufgabe 7*

(a) Das Koordinatensystem verschieben, so dass die x-Achse ($y = 0$) mit $y = 2$ zusammenfällt:

$y \to y + 2$: $y + 2 = 2^x$

Spiegeln des neuen Graphen an der x-Achse:

Aufgabe 7*

(a) Das Koordinatensystem verschieben, so dass die x-Achse ($y = 0$) mit $y = 2$ zusammenfällt:

$y \to y + 2$: $y + 2 = 2^x$

Spiegeln des neuen Graphen an der x-Achse:

$y \to -y$: $-y + 2 = 2^x$

Aufgabe 7*

(a) Das Koordinatensystem verschieben, so dass die x-Achse ($y = 0$) mit $y = 2$ zusammenfällt:

$y \to y + 2$: $y + 2 = 2^x$

Spiegeln des neuen Graphen an der x-Achse:

$y \to -y$: $-y + 2 = 2^x$

Verschiebung rückgängig machen und die Gleichung vereinfachen:

Aufgabe 7*

(a) Das Koordinatensystem verschieben, so dass die x-Achse ($y = 0$) mit $y = 2$ zusammenfällt:

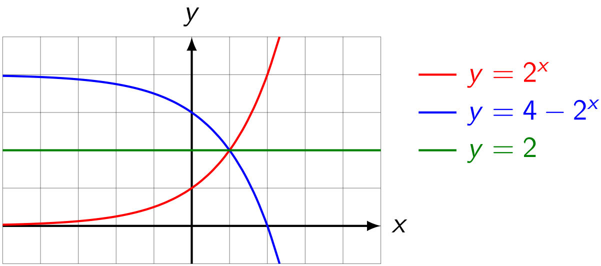
$y \rightarrow y + 2$: $y + 2 = 2^x$

Spiegeln des neuen Graphen an der x-Achse:

$y \rightarrow -y$: $-y + 2 = 2^x$

Verschiebung rückgängig machen und die Gleichung vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
y \rightarrow y - 2\text{: } -(y-2) + 2 &= 2^x \\
-y + 4 &= 2^x \\
y &= 4 - 2^x
\end{aligned}
$$



y
x
$y = 2^x$
$y = 4 - 2^x$
$y = 2$

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass die y-Achse ($x = 0$) mit $x = -1$ zusammenfällt:

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass die y-Achse ($x = 0$) mit $x = -1$ zusammenfällt:

$x \to x - 1$: $y = 2^{x-1}$

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass die y-Achse ($x = 0$) mit $x = -1$ zusammenfällt:

$x \to x - 1$: $y = 2^{x-1}$

Axiale Streckung des neuen Graphen an der y-Achse:

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass die y-Achse ($x = 0$) mit $x = -1$ zusammenfällt:

$x \to x - 1$: $y = 2^{x-1}$

Axiale Streckung des neuen Graphen an der y-Achse:

$x \to \frac{1}{2}x$: $y = 2^{\frac{1}{2}x-1}$

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass die y-Achse ($x = 0$) mit $x = -1$ zusammenfällt:

$x \to x - 1$: $y = 2^{x-1}$

Axiale Streckung des neuen Graphen an der y-Achse:

$x \to \frac{1}{2}x$: $y = 2^{\frac{1}{2}x-1}$

Verschiebung rückgängig machen und die Gleichung vereinfachen:

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass die y-Achse ($x = 0$) mit $x = -1$ zusammenfällt:

$x \to x - 1$: $y = 2^{x-1}$

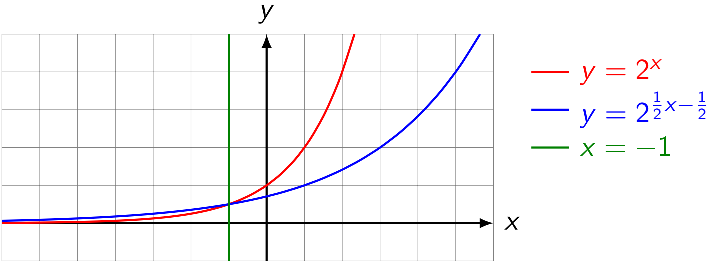
Axiale Streckung des neuen Graphen an der y-Achse:

$x \to \frac{1}{2}x$: $y = 2^{\frac{1}{2}x-1}$

Verschiebung rückgängig machen und die Gleichung vereinfachen:

$$x \to x + 1\text{: } y = 2^{\frac{1}{2}(x+1)-1}$$

$$y = 2^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$$



y
x
$y = 2^x$
$y = 2^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$
$x = -1$

Aufgabe 8*

Der Graph der Funktion $f: y = 3^x$ wird transformiert. Gib die Funktionsgleichung der Bildkurve an. (ohne Skizze)

(a) Punktspiegelung an $Z(2, 1)$

(b) Zentrische Streckung am Punkt $Z(3, -2)$ mit dem Faktor $k = \frac{1}{3}$

Hinweis: Verschiebe das Koordinatensystem so, dass das jeweilige Zentrum mit dem Ursprung zusammenfällt. Führe anschliessend die Punktspiegelung am Ursprung durch und mache die Verschiebung rückgängig.

Aufgabe 8*

(a) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0, 0)$ im Spiegelungszentrum $Z(2, 1)$ liegt.

Aufgabe 8*

(a) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Spiegelungszentrum $Z(2,1)$ liegt.

$x \to x+2$ und $y \to y+1$: $y+1 = 3^{x+2}$

Aufgabe 8*

(a) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Spiegelungszentrum $Z(2,1)$ liegt.

$x \to x+2$ und $y \to y+1$: $y+1 = 3^{x+2}$

Spiegelung am Ursprung:

Aufgabe 8*

(a) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Spiegelungszentrum $Z(2,1)$ liegt.

$x \to x+2$ und $y \to y+1$: $y+1 = 3^{x+2}$

Spiegelung am Ursprung:

$x \to -x$ und $y \to -y$: $-y+1 = 3^{-x+2}$

Aufgabe 8*

(a) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Spiegelungszentrum $Z(2,1)$ liegt.

$x \to x+2$ und $y \to y+1$: $y+1 = 3^{x+2}$

Spiegelung am Ursprung:

$x \to -x$ und $y \to -y$: $-y+1 = 3^{-x+2}$

Verschiebung rückgängig machen und die Gleichung vereinfachen:

Aufgabe 8*

(a) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Spiegelungszentrum $Z(2,1)$ liegt.

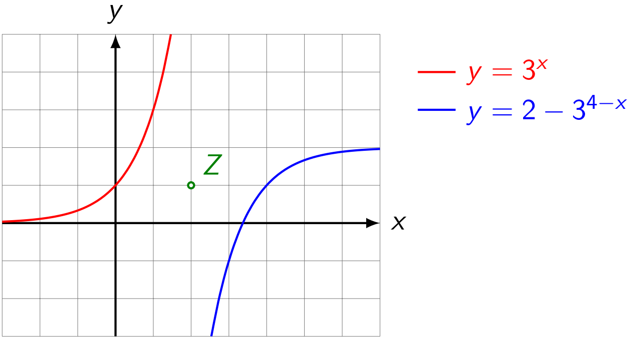
$x \to x+2$ und $y \to y+1$: $y+1 = 3^{x+2}$

Spiegelung am Ursprung:

$x \to -x$ und $y \to -y$: $-y+1 = 3^{-x+2}$

Verschiebung rückgängig machen und die Gleichung vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
x \to x-2 \text{ und } y \to y-1\text{: } -(y-1)+1 &= 3^{-(x-2)+2} \\
-y+2 &= 3^{-x+4} \\
y &= 2 - 3^{4-x}
\end{aligned}
$$


y
x
Z
$y = 3^x$
$y = 2 - 3^{4-x}$

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Streckungszentrum $Z(3,-2)$ liegt.

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Streckungszentrum $Z(3,-2)$ liegt.

$x \to x+3$ und $y \to y-2$: $y-2 = 3^{x+3}$

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Streckungszentrum $Z(3,-2)$ liegt.

$x \rightarrow x+3$ und $y \rightarrow y-2$: $y-2 = 3^{x+3}$

Zentrische Streckung am Ursprung mit Faktor $\frac{1}{3}$:

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Streckungszentrum $Z(3,-2)$ liegt.

$x \to x+3$ und $y \to y-2$: $y-2 = 3^{x+3}$

Zentrische Streckung am Ursprung mit Faktor $\frac{1}{3}$:

$x \to 3x$ und $y \to 3y$: $3y-2 = 3^{3x+3}$

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Streckungszentrum $Z(3,-2)$ liegt.

$x \to x+3$ und $y \to y-2$: $y-2 = 3^{x+3}$

Zentrische Streckung am Ursprung mit Faktor $\frac{1}{3}$:

$x \to 3x$ und $y \to 3y$: $3y-2 = 3^{3x+3}$

Verschiebung rückgängig machen und die Gleichung vereinfachen:

(b) Das Koordinatensystem so verschieben, dass der Ursprung $(0,0)$ im Streckungszentrum $Z(3,-2)$ liegt.

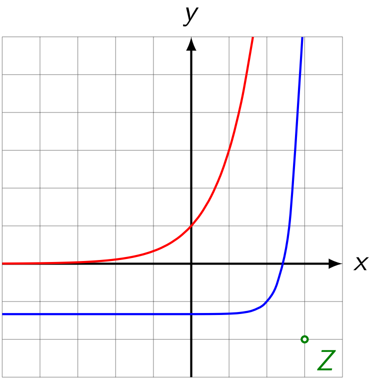
$x \to x+3$ und $y \to y-2$: $y-2 = 3^{x+3}$

Zentrische Streckung am Ursprung mit Faktor $\frac{1}{3}$:

$x \to 3x$ und $y \to 3y$: $3y-2 = 3^{3x+3}$

Verschiebung rückgängig machen und die Gleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned} x \to x-3 \text{ und } y \to y+2\text{: } 3(y+2)-2 &= 3^{3(x-3)+3} \\ 3y+4 &= 3^{3x-6} \\ y+\tfrac{4}{3} &= 3^{3x-7} \\ y &= 3^{3x-7}-\tfrac{4}{3} \end{aligned}$$



$y = 3^x$

$y = 3^{3x-7} - \frac{4}{3}$

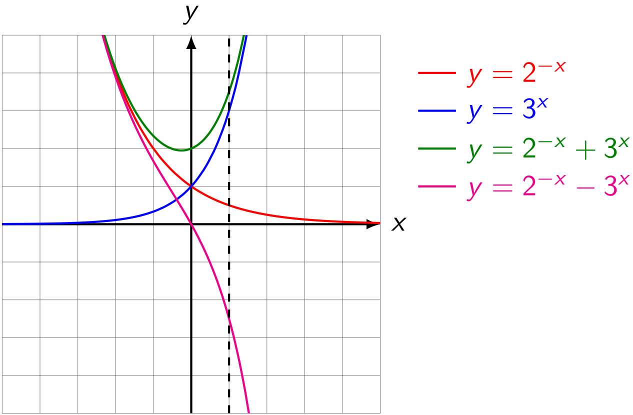
Aufgabe 9

Skizziere ohne Hilfe des Taschenrechners die Graphen der folgenden Funktionen mittels Superposition in ein Koordinatensystem ($-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$).

(a) $y = 2^{-x} + 3^x$

(b) $y = 2^{-x} - 3^x$

Aufgabe 9



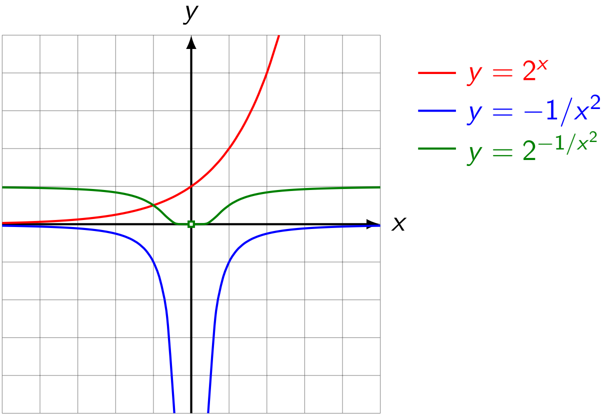
Aufgabe 10

Skizziere ohne Hilfe des Taschenrechners die Graphen der Funktionen mit den Gleichungen

- $f\colon y = 2^x$,
- $g\colon y = -1/x^2$ und
- $h\colon y = (f \circ g)(x)$

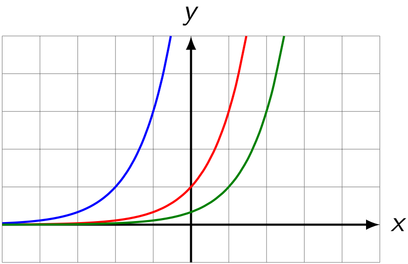
in ein Koordinatensystem ($-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$).

Aufgabe 10

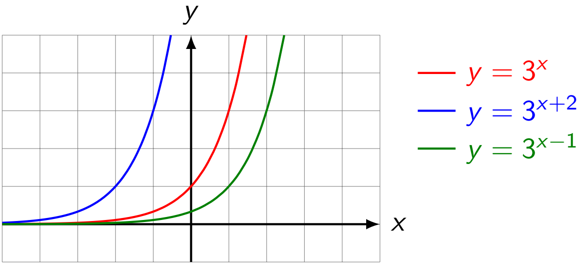


Aufgabe 11

Bei den dargestellten Kurven handelt es sich um Graphen von Exponentialfunktionen. Bestimme ihre Funktionsgleichungen.

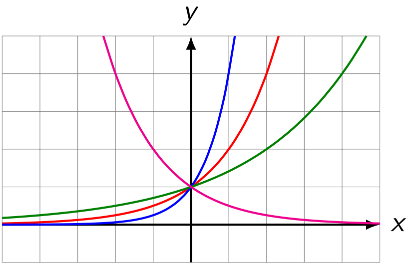


Aufgabe 11

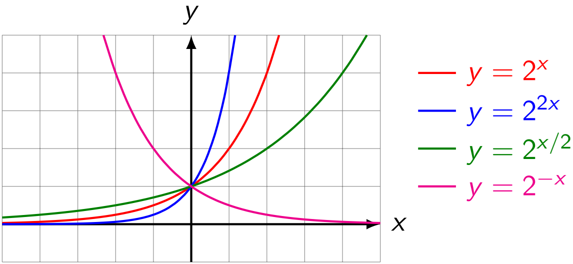


Aufgabe 12

Bei den dargestellten Kurven handelt es sich um Graphen von Exponentialfunktionen. Bestimme ihre Funktionsgleichungen.

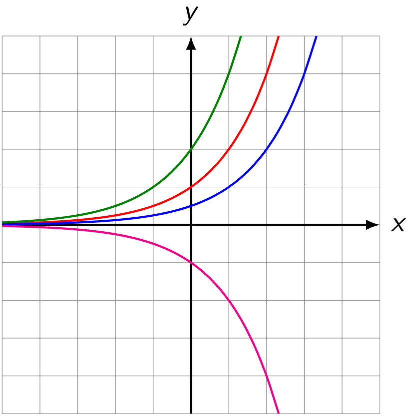


Aufgabe 12

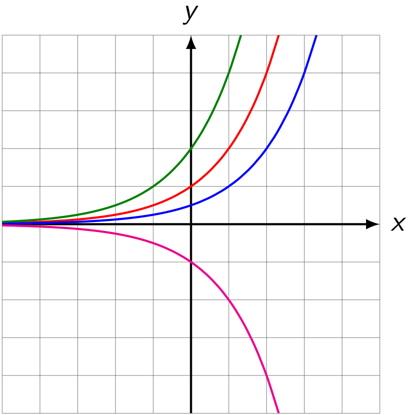


Aufgabe 13

Bei den dargestellten Kurven handelt es sich um Graphen von Exponentialfunktionen. Bestimme ihre Funktionsgleichungen.



Aufgabe 13



— $y = 2^x$

— $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x = 2^{x-1}$

— $y = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$

— $y = -2^x$

Aufgabe 14

Ein Aktienfonds erzielt eine mittlere jährliche Rendite von 3.5%. Eine Person investiert CHF 40 000 und die daraus entstehenden jährlichen Erträge (Zinsen) in diesen Aktienfonds. Über welchen Betrag kann sie nach 8 Jahren verfügen? (Die oben genannte Rendite darf als konstant angenommen werden.)

Aufgabe 14

$$K_8 = 40\,000 \cdot 1.035^8 = \text{CHF } 52\,672.35$$

Aufgabe 15

Was ist besser: Ein Kapital K_0 ...

(a) zuerst 5 Jahre zu $p = 2\%$ und dann während 5 Jahren zu $p = 3\%$ verzinsen oder
(b) zuerst 5 Jahre zu $p = 3\%$ und dann während 5 Jahren zu $p = 2\%$ verzinsen?

Begründe die Antwort.

Aufgabe 15

(a) $K_{10} = K_0 \cdot 1.02^5 \cdot 1.03^5$

(b) $K_{10} = K_0 \cdot 1.03^5 \cdot 1.02^5$

Beide Varianten ergeben denselben Endwert (Kommutativgesetz).

Aufgabe 16

Annina möchte in 5 Jahren eine Weltreise machen und wird dafür CHF 8 000 benötigen. Welchen Betrag muss sie heute auf ihr Sparkonto (Zinsfuss 2% p. a.) einzahlen, um die gewünschte Summe (einschliesslich Kapital) in 5 Jahren erspart zu haben?

Aufgabe 16

$$K_0 = K_n : r^n$$

$$K_0 = 8\,000 : 1.02^5 = \text{CHF } 7245.85$$

Aufgabe 17

Wie gross müsste die jährliche Verzinsung eines Kapitals sein, damit ein Kapital von EUR 400 000 innerhalb von 12 Jahren mit Zinsen und Zinseszinsen auf EUR 500 000 anwächst?

Aufgabe 17

$$K_n = K_0 \cdot r^n \quad \Leftrightarrow \quad r = (K_n/K_0)^{\frac{1}{n}}$$

Aufgabe 17

$$K_n = K_0 \cdot r^n \quad \Leftrightarrow \quad r = (K_n/K_0)^{\frac{1}{n}}$$

$$r = (5/4)^{\frac{1}{12}} = 1.018769 \quad \Rightarrow \quad p = 1.8769\%$$

Aufgabe 18

Ein Investitionsobjekt wird jedes Jahr um 5% des Vorjahreswertes abgeschrieben. Welchen Wert, in Prozenten des ursprüglichen Werts, hat das Objekt nach 4 Jahren?

Mit Abschreibungen wird die Wertverminderung eines Objekts mit begrenzter Nutzungsdauer erfasst.

Hinweis: Ersetze den *Auf*zinungsfaktor $r = 1 + \frac{p}{100}$ durch den *Ab*zinsungsfaktor $v = 1 - \frac{p}{100}$.

Aufgabe 18

$$K_n = K_0 \cdot v^n$$

$$K_4 = K_0 \cdot 0.95^4 = 0.8145 \quad \Rightarrow \quad 81.45\%$$

Aufgabe 19

In einem Land beträgt die jährliche Inflation (Geldentwertung) 10%. Welchen Wertverlust in Prozenten des heutigen Werts hat diese Währung nach 3 Jahren. (Die Inflationsrate darf als konstant angenommen werden.)

Aufgabe 19

$$K_n = K_0 \cdot v^n$$

$$K_3 = K_0 \cdot 0.9^3 = 0.729 \quad \Rightarrow \quad 72.9\%$$

Aufgabe 20

Die Geldentwertung hat den Wert einer Währung während der letzten 6 Jahre um insgesamt 20% reduziert. Berechne die mittlere jährliche Inflationsrate.

Aufgabe 20

$$K_n = K_0 \cdot v^n \quad \Leftrightarrow \quad v = (K_n/K_0)^{\frac{1}{n}}$$

Aufgabe 20

$$K_n = K_0 \cdot v^n \quad \Leftrightarrow \quad v = (K_n/K_0)^{\frac{1}{n}}$$

$$v = (0.8/1)^{\frac{1}{6}} = 0.96349 = 1 - \frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad p \approx 3.4\%$$

Aufgabe 21

Eine Bakterienkultur ohne Raum- und Nahrungsmangel wächst exponentiell. Um 9:00 Uhr wurden 400 Bakterien gezählt und um 12:00 Uhr 3200 Bakterien. Wie gross ist die Bakterienpopulation um

(a) 11:00 Uhr

(b) 12:30 Uhr?

Hinweis: Bestimme zuerst die Parameter a und b der Wachstumsfunktion $f(t) = a \cdot b^t$.

Aufgabe 21

Verwende eine Zeitskala, die bei $t = 0$ (9:00 Uhr) beginnt.

Aufgabe 21

Verwende eine Zeitskala, die bei $t = 0$ (9:00 Uhr) beginnt.

$f(0) = a \cdot b^0 = a = 400$

Aufgabe 21

Verwende eine Zeitskala, die bei $t = 0$ (9:00 Uhr) beginnt.

$f(0) = a \cdot b^0 = a = 400$

$f(3) = a \cdot b^3 = 400 \cdot b^3 = 3200 \quad \Rightarrow$

Aufgabe 21

Verwende eine Zeitskala, die bei $t = 0$ (9:00 Uhr) beginnt.

$$f(0) = a \cdot b^0 = a = 400$$

$$f(3) = a \cdot b^3 = 400 \cdot b^3 = 3200 \quad \Rightarrow \quad b^3 = 8 \quad \Rightarrow$$

Aufgabe 21

Verwende eine Zeitskala, die bei $t = 0$ (9:00 Uhr) beginnt.

$$f(0) = a \cdot b^0 = a = 400$$

$$f(3) = a \cdot b^3 = 400 \cdot b^3 = 3200 \quad \Rightarrow \quad b^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

Aufgabe 21

Verwende eine Zeitskala, die bei $t = 0$ (9:00 Uhr) beginnt.

$$f(0) = a \cdot b^0 = a = 400$$

$$f(3) = a \cdot b^3 = 400 \cdot b^3 = 3200 \quad \Rightarrow \quad b^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

(a) $P(2) = 400 \cdot 2^2 = 1600\, Bakterien$

Aufgabe 21

Verwende eine Zeitskala, die bei $t = 0$ (9:00 Uhr) beginnt.

$$f(0) = a \cdot b^0 = a = 400$$

$$f(3) = a \cdot b^3 = 400 \cdot b^3 = 3200 \quad \Rightarrow \quad b^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

(a) $P(2) = 400 \cdot 2^2 = 1600\, Bakterien$

(b) $P(3.5) = 400 \cdot 2^{3.5} = 4525\, Bakterien$

Aufgabe 22

Die Holzmenge eines Waldes, in dem keine Bäume geschlagen werden, wächst exponentiell. Vor vier Jahren betrug sie $11\,200\,\mathrm{m}^3$, heute sind es $56\,700\,\mathrm{m}^3$.

(b) Berechne die Holzmenge in 5 Jahren.
(a) Berechne die Holzmenge vor 6 Jahren.

Aufgabe 22

Verwende eine Zeitskala die bei $t = 0$ (vor 4 Jahren) beginnt.

Aufgabe 22

Verwende eine Zeitskala die bei $t = 0$ (vor 4 Jahren) beginnt.

$f(0) = a \cdot b^0 = a = 11\,200$

Aufgabe 22

Verwende eine Zeitskala die bei $t = 0$ (vor 4 Jahren) beginnt.

$$f(0) = a \cdot b^0 = a = 11\,200$$

$$f(4) = a \cdot b^4 = 11\,200 \cdot b^4 = 56\,700 \quad \Rightarrow$$

Aufgabe 22

Verwende eine Zeitskala die bei $t = 0$ (vor 4 Jahren) beginnt.

$$f(0) = a \cdot b^0 = a = 11\,200$$

$$f(4) = a \cdot b^4 = 11\,200 \cdot b^4 = 56\,700 \quad \Rightarrow \quad b^4 = \frac{81}{16} \quad \Rightarrow$$

Aufgabe 22

Verwende eine Zeitskala die bei $t = 0$ (vor 4 Jahren) beginnt.

$$f(0) = a \cdot b^0 = a = 11\,200$$

$$f(4) = a \cdot b^4 = 11\,200 \cdot b^4 = 56\,700 \quad \Rightarrow \quad b^4 = \frac{81}{16} \quad \Rightarrow \quad b = \tfrac{3}{2}$$

Aufgabe 22

Verwende eine Zeitskala die bei $t = 0$ (vor 4 Jahren) beginnt.

$$f(0) = a \cdot b^0 = a = 11\,200$$

$$f(4) = a \cdot b^4 = 11\,200 \cdot b^4 = 56\,700 \quad \Rightarrow \quad b^4 = \frac{81}{16} \quad \Rightarrow \quad b = \tfrac{3}{2}$$

(a) $P(4+5) = 11\,200 \cdot 1.5^9 = 430\,565\,\mathrm{m}^3$

Aufgabe 22

Verwende eine Zeitskala die bei $t = 0$ (vor 4 Jahren) beginnt.

$$f(0) = a \cdot b^0 = a = 11\,200$$

$$f(4) = a \cdot b^4 = 11\,200 \cdot b^4 = 56\,700 \quad \Rightarrow \quad b^4 = \frac{81}{16} \quad \Rightarrow \quad b = \tfrac{3}{2}$$

(a) $P(4+5) = 11\,200 \cdot 1.5^9 = 430\,565\,\mathrm{m}^3$

(b) $P(4-6) = 11\,200 \cdot 1.5^{-2} = 4977\,\mathrm{m}^3$

Aufgabe 23

Berechne Näherungswerte $\tilde{a}$ der folgenden irrationalen Zahlen mit Hilfe der ersten 6 Summanden der Taylorreihe für e^x und runde, falls nötig, auf 6 signifikante Stellen. Berechne ferner den relativen Fehler r vom „exakten" Wert a mit Hilfe des Taschenrechners und der Formel $r = (\tilde{a} - a)/a$ (3 signifikante Stellen).

(a) e^3

(b) e^{-2}

(c) $\mathrm{e}^{0.5}$

Aufgabe 23

(a) $\mathrm{e}^3 \approx \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} = 18.4 = \tilde{a}$

Aufgabe 23

(a) $$\mathrm{e}^3 \approx \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} = 18.4 = \tilde{a}$$

$$r = \frac{\tilde{a} - a}{a} = \frac{18.4 - \mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^3} = -0.0839$$

Aufgabe 23

(a) $$e^3 \approx \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} = 18.4 = \tilde{a}$$

$$r = \frac{\tilde{a} - a}{a} = \frac{18.4 - e^3}{e^3} = -0.0839$$

(b) $$e^{-2} \approx \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^5}{5!} = 0.0666666 = \tilde{a}$$

Aufgabe 23

(a) $$e^3 \approx \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} = 18.4 = \tilde{a}$$

$$r = \frac{\tilde{a} - a}{a} = \frac{18.4 - e^3}{e^3} = -0.0839$$

(b) $$e^{-2} \approx \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^5}{5!} = 0.0666666 = \tilde{a}$$

$$r = \frac{\tilde{a} - a}{a} = \frac{0.0666666 - e^{-2}}{e^{-2}} = -0.507$$

Aufgabe 23

(a) $$e^3 \approx \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} = 18.4 = \tilde{a}$$

$$r = \frac{\tilde{a} - a}{a} = \frac{18.4 - e^3}{e^3} = -0.0839$$

(b) $$e^{-2} \approx \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^5}{5!} = 0.0666666 = \tilde{a}$$

$$r = \frac{\tilde{a} - a}{a} = \frac{0.0666666 - e^{-2}}{e^{-2}} = -0.507$$

(c) $$e^{0.5} \approx 1 + \frac{0.5}{1!} + \frac{0.5^2}{2!} + \frac{0.5^3}{3!} + \frac{0.5^4}{4!} + \frac{0.5^5}{5!} = 1.64870 = \tilde{a}$$

Aufgabe 23

(a) $$e^3 \approx \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} = 18.4 = \tilde{a}$$

$$r = \frac{\tilde{a} - a}{a} = \frac{18.4 - e^3}{e^3} = -0.0839$$

(b) $$e^{-2} \approx \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^5}{5!} = 0.0666666 = \tilde{a}$$

$$r = \frac{\tilde{a} - a}{a} = \frac{0.0666666 - e^{-2}}{e^{-2}} = -0.507$$

(c) $$e^{0.5} \approx 1 + \frac{0.5}{1!} + \frac{0.5^2}{2!} + \frac{0.5^3}{3!} + \frac{0.5^4}{4!} + \frac{0.5^5}{5!} = 1.64870 = \tilde{a}$$

$$r = \frac{\tilde{a} - a}{a} = \frac{1.64870 - e^{0.5}}{e^{0.5}} = -1.42 \cdot 10^{-5}$$

Aufgabe 24

Löse die Exponentialgleichungen.

(a) $2^{3x-4} = 2^{2x+7}$

(b) $3^{x+5} = 3^{8-x}$

Aufgabe 24

(a)
$$
\begin{aligned}
2^{3x-4} &= 2^{2x+7}\\
3x-4 &= 2x+7\\
x &= 11
\end{aligned}
$$

Aufgabe 24

(a)
$$\begin{aligned} 2^{3x-4} &= 2^{2x+7} \\ 3x-4 &= 2x+7 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3^{x+5} &= 3^{8-x} \\ x+5 &= 8-x \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 25

Löse die Exponentialgleichungen.

(b) $0.1^x = 10\,000$

(a) $2^{x+2} = 0.5^{x-7}$

Aufgabe 25

(a)
$$\begin{aligned} 0.1^x &= 10\,000 \\ \left(\frac{1}{10}\right)^x &= 10\,000 \\ 10^{-x} &= 10^4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Aufgabe 25

(a)
$$
\begin{aligned}
0.1^x &= 10\,000 \\
\left(\frac{1}{10}\right)^x &= 10\,000 \\
10^{-x} &= 10^4 \\
x &= -4
\end{aligned}
$$

(b)
$$
\begin{aligned}
2^{x+2} &= 0.5^{x-7} \\
2^{x+2} &= 2^{-(x-7)} \\
x+2 &= -x+7 \\
2x &= 5 \\
x &= \tfrac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 26

Löse die Exponentialgleichungen.

(a) $7^{x+8} \cdot 7^{3x-4} = 7^{2x+6}$

(b) $2^{7-x} : 2^{9-5x} = 2^{3x-6}$

Aufgabe 26

(a)
$$\begin{aligned} 7^{x+8} \cdot 7^{3x-4} &= 7^{2x+6} \\ 7^{(x+8)+(3x-4)} &= 7^{2x+6} \\ 4x + 4 &= 2x + 6 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 26

(a)
$$\begin{aligned} 7^{x+8} \cdot 7^{3x-4} &= 7^{2x+6} \\ 7^{(x+8)+(3x-4)} &= 7^{2x+6} \\ 4x+4 &= 2x+6 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2^{7-x} : 2^{9-5x} &= 2^{3x-6} \\ 2^{(7-x)-(9-5x)} &= 2^{3x-6} \\ 2^{4x-2} &= 2^{3x-6} \\ -2+4x &= 3x-6 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Aufgabe 27

Löse die Exponentialgleichungen.

(a) $4^{x+5} \cdot 2^{x+8} = 8^{3-x}$

(b) $6^{2x-1} \cdot 36^{x-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^{5x-4}$

Aufgabe 27

(a)
$$\begin{aligned}
4^{x+5} \cdot 2^{x+8} &= 8^{3-x} \\
2^{2(x+5)} \cdot 2^{x+8} &= 2^{3(3-x)} \\
2^{2x+10+x+8} &= 2^{9-3x} \\
3x + 18 &= 9 - 3x \\
6x &= -9 \\
x &= -\tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 27

(a)
$$\begin{aligned}
4^{x+5} \cdot 2^{x+8} &= 8^{3-x} \\
2^{2(x+5)} \cdot 2^{x+8} &= 2^{3(3-x)} \\
2^{2x+10+x+8} &= 2^{9-3x} \\
3x + 18 &= 9 - 3x \\
6x &= -9 \\
x &= -\tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
6^{2x-1} \cdot 36^{x-2} &= \left(\tfrac{1}{6}\right)^{5x-4} \\
6^{2x-1} \cdot 6^{2(x-2)} &= 6^{-(5x-4)} \\
6^{2x-1+2x-4} &= 6^{-(5x-4)} \\
4x - 5 &= 4 - 5x \\
9x &= 9 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 28

Löse die Exponentialgleichungen.

(a) $3^{x+2} + 6 \cdot 3^{x+1} = 1$

(b) $7 \cdot 2^{2x-4} - 4^{x-3} = 1.5 \cdot 2^{3x+4}$

Aufgabe 28

(a)
$$\begin{aligned} 3^{x+2} + 6 \cdot 3^{x+1} &= 1 \\ 3 \cdot 3^{x+1} + 6 \cdot 3^{x+1} &= 1 \\ 9 \cdot 3^{x+1} &= 1 \\ 3^2 \cdot 3^{x+1} &= 3^0 \\ 3^{x+3} &= 3^0 \\ x + 3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
7 \cdot 2^{2x-4} - 4^{x-3} &= 1.5 \cdot 2^{3x+4} \\
7 \cdot 2^{2x-4} - 2^{2x-6} &= 1.5 \cdot 2^{3x+4} \\
7 \cdot 2^{2x-4} - 4 \cdot 2^{2x-4} &= 1.5 \cdot 2^{3x+4} \\
3 \cdot 2^{2x-4} &= 3 \cdot 2^{3x+3} \\
2x - 4 &= 3x + 3 \\
x &= -7
\end{aligned}$$

Aufgabe 29

Löse die Exponentialgleichungen.

(a) $4^x - 4 = 3 \cdot 2^x$

(b) $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$

Aufgabe 29

(a)
$$\begin{aligned}
4^x - 4 &= 3 \cdot 2^x \\
2^{2x} - 4 &= 3 \cdot 2^x \\
\left(2^x\right)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 &= 0 \qquad \text{Substitution } 2^x = a \\
a^2 - 3a - 4 &= 0 \\
(a-4)(a+1) &= 0
\end{aligned}$$

$$a_1 = 4 = 2^2 = 2^{x_1}$$

$$a_2 = -1 = 2^{x_2}$$

$L = \{2\}$

(b)
$$\begin{aligned} 3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 &= 0 \\ 3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 &= 0 \\ 3 \cdot \left(3^x\right)^2 - 10 \cdot 3^x + 3 &= 0 \qquad \text{Substitution } 3^x = a \\ 3a^2 - 10a + 3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) $$3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$3 \cdot \left(3^x\right)^2 - 10 \cdot 3^x + 3 = 0 \qquad \text{Substitution } 3^x = a$$

$$3a^2 - 10a + 3 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$$

$$a_1 = \frac{10 + \sqrt{64}}{6} = 3^1 = 3^{x_1}$$

$$a_2 = \frac{10 - \sqrt{64}}{6} = 1/3 = 3^{-1} = 3^{x_2}$$

(b) $$3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$3 \cdot \left(3^x\right)^2 - 10 \cdot 3^x + 3 = 0 \qquad \text{Substitution } 3^x = a$$

$$3a^2 - 10a + 3 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$$

$$a_1 = \frac{10 + \sqrt{64}}{6} = 3^1 = 3^{x_1}$$

$$a_2 = \frac{10 - \sqrt{64}}{6} = 1/3 = 3^{-1} = 3^{x_2}$$

$$L = \{1, -1\}$$

Aufgabe 30

Löse die Exponentialgleichungen.

(a) $\left(16^x - 1\right)^3 - 49\left(16^x - 1\right) = 0$

(b) $\left(2^{2x} - 6 \cdot 2^x\right)^2 - 8\left(2^{2x} - 6 \cdot 2^x\right) = 128$

Aufgabe 30

(a) $\left(16^x - 1\right)^3 - 49\left(16^x - 1\right) = 0$ Substitution: $16^x - 1 = a$

$$
\begin{aligned}
a^3 - 49a &= 0 \\
a(a^2 - 49) &= 0 \\
a(a-7)(a+7) &= 0 \\
a_1 &= 0 \\
a_2 &= 7 \\
a_3 &= -7
\end{aligned}
$$

Aufgabe 30

(a) $\left(16^x - 1\right)^3 - 49\left(16^x - 1\right) = 0$ Substitution: $16^x - 1 = a$

$$
\begin{aligned}
a^3 - 49a &= 0 \\
a(a^2 - 49) &= 0 \\
a(a-7)(a+7) &= 0 \\
a_1 &= 0 \\
a_2 &= 7 \\
a_3 &= -7
\end{aligned}
$$

Substitution rückgängig machen:

Aufgabe 30

(a) $$\left(16^x-1\right)^3-49\left(16^x-1\right)=0 \quad \text{Substitution: } 16^x-1=a$$

$$\begin{aligned}
a^3-49a&=0\\
a(a^2-49)&=0\\
a(a-7)(a+7)&=0\\
a_1&=0\\
a_2&=7\\
a_3&=-7
\end{aligned}$$

Substitution rückgängig machen:

$$\begin{aligned}
16^{x_1}-1&=0 & 16^{x_2}-1&=7 & 16^{x_3}-1&=-7\\
16^{x_1}-16^0&=0 & 2^{4x_2}&=2^3 & 16^{x_3}&=-6\\
x_1&=0 & x_2&=\tfrac{3}{4} & &\text{keine Lösung}
\end{aligned}$$

Aufgabe 30

(a) $$\left(16^x - 1\right)^3 - 49\left(16^x - 1\right) = 0 \quad \text{Substitution: } 16^x - 1 = a$$

$$\begin{aligned} a^3 - 49a &= 0 \\ a(a^2 - 49) &= 0 \\ a(a-7)(a+7) &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 7 \\ a_3 &= -7 \end{aligned}$$

Substitution rückgängig machen:

$$\begin{aligned} 16^{x_1} - 1 &= 0 \\ 16^{x_1} - 16^0 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 16^{x_2} - 1 &= 7 \\ 2^{4x_2} &= 2^3 \\ x_2 &= \tfrac{3}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 16^{x_3} - 1 &= -7 \\ 16^{x_3} &= -6 \\ &\text{keine Lösung} \end{aligned}$$

$L = \{0, \frac{3}{4}\}$

(b) $$\left(2^{2x}-6\cdot 2^{x}\right)^{2}-8\left(2^{2x}-6\cdot 2^{x}\right)=128 \quad \text{Subst. } (\dots)=a$$

$$\begin{aligned}
a^2-8a-128&=0\\
(a-16)(a+8)&=0\\
a_1&=16\\
a_2&=-8
\end{aligned}$$

(b) $\left(2^{2x}-6\cdot 2^{x}\right)^{2}-8\left(2^{2x}-6\cdot 2^{x}\right)=128 \quad \text{Subst. } (\dots)=a$

$$a^2-8a-128=0$$
$$(a-16)(a+8)=0$$
$$a_1=16$$
$$a_2=-8$$

$$(2^x)^2-6\cdot 2^x=16 \quad \text{Substitution: } 2^x=b$$
$$b^2-6b-16=0$$
$$(b-8)(b+2)=0$$
$$b_1=8=2^3=2^x \quad \Rightarrow \quad x_1=3$$
$$b_2=-2 \quad \Rightarrow \quad —$$

(b) $\left(2^{2x} - 6 \cdot 2^x\right)^2 - 8\left(2^{2x} - 6 \cdot 2^x\right) = 128 \quad \text{Subst. } (\dots) = a$

$$a^2 - 8a - 128 = 0$$
$$(a - 16)(a + 8) = 0$$
$$a_1 = 16$$
$$a_2 = -8$$

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x = 16 \quad \text{Substitution: } 2^x = b$

$$b^2 - 6b - 16 = 0$$
$$(b - 8)(b + 2) = 0$$
$$b_1 = 8 = 2^3 = 2^x \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$$
$$b_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad —$$

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x = -8 \quad \text{Substitution: } 2^x = b$

$$b^2 - 6b + 8 = 0$$
$$(b - 4)(b - 2) = 0$$
$$b_1 = 4 = 2^2 = 2^x \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$
$$b_2 = 2 = 2^1 = 2^x \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$$