

Aufgabe 1

$$B < E < C < A < D$$

Da es sich um *asymptotische Laufzeiten*, d. h. Laufzeiten für *grosse* n handelt, kann es sein, dass die Dominanz einer der Funktionen erst ab einem ausreichend grossen n erkennbar wird. Zu Illustration dieses Sachverhalts sind hier die Werte der Laufzeitfunktionen für einige n tabelliert:

Aufgabe 2

(a) $O(2^{n+1}) = O(2 \cdot 2^n) = O(2^n)$

(b) $O(\sqrt{4n}) = 2\sqrt{n} = O(\sqrt{n})$

(c) $O((n^2 + n)(n + 2)(n + 3)) = O(n^4 + \dots) = O(n^4)$

(d) $O(3) = O(1)$

Aufgabe 3

```

1 def funktion(n):
2     s = 0
3     for i in range(0, n):
4         for j in range(0, i):
5             s = s + j
6     return s

```

Zeile	Kosten	Anzahl
2	c_1	1
3	c_2	n
4	c_3	n^2
5	c_4	n^2
6	c_5	1

$$T(n) = (c_1 + c_5) \cdot 1 + c_2 \cdot n + (c_3 + c_4) \cdot n^2 \in O(n^2)$$

Aufgabe 4

```

1 def funktion(n):
2     s = 0
3     for i in range(0, n):
4         s = s + i
5     for j in range(0, n):
6         s = s * j
7     return s

```

Zeile	Kosten	Anzahl
2	c_1	1
3	c_2	n
4	c_3	n
5	c_2	n
6	c_4	n
7	c_5	1

$$T(n) = (c_1 + c_5) \cdot 1 + (c_2 + c_3 + c_4) \cdot n \in O(n)$$

Aufgabe 5

$$\begin{aligned} T(30\,000) &= c \cdot (30\,000)^2 = c \cdot (3 \cdot 10\,000)^2 = 9 \cdot c \cdot 10\,000^2 \\ &= 9 \cdot T(10\,000) = 9 \cdot 40\text{ s} = 360\text{ s} = 6\text{ Min} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned} T(10^{10}) &= c \cdot \log(10^{10}) = c \cdot \log(10^{4 \cdot 2.5}) = c \cdot \log\left(\left(10^4\right)^{2.5}\right) \\ &= 2.5 \cdot c \cdot \log(10^4) = 2.5 \cdot T(10^4) = 2.5 \cdot 8\text{ min} = 20\text{ min} \end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned} T(9 \cdot 10^7) &= c \cdot 9 \cdot 10^7 = 1.5 \cdot c \cdot 6 \cdot 10^7 = 1.5 \cdot T(6 \cdot 10^7) \\ &= 1.5 \cdot 4\text{ s} = 6\text{ s} \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann natürlich auch direkt mit einem Dreisatz bestimmt werden.

Aufgabe 8

$$\begin{aligned} T(8\,000\,000) &= T(200^3) = c \cdot 200^3 \cdot \log_2(200^3) \\ &= c \cdot 200^2 \cdot 200 \cdot 3 \cdot \log(200) \\ &= 40\,000 \cdot 3 \cdot c \cdot 200 \cdot \log(200) \\ &= 120\,000 \cdot T(200) = 120\,000 \cdot 5\text{ ms} \\ &= 600\,000\text{ ms} = 10\text{ min} \end{aligned}$$

Aufgabe 9

$$\begin{aligned} T(45) &= c \cdot 2^{45} = c \cdot 2^{40} \cdot 2^5 = 32 \cdot c \cdot 2^{40} \\ &= 32 \cdot T(40) = 32 \cdot 6\text{ h} = 8 \cdot 24\text{ h} = 8\text{ d} \end{aligned}$$

Aufgabe 10

$$\begin{aligned} T(9) &= c \cdot 9! = c \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7! = 72 \cdot c \cdot 7! \\ &= 72 \cdot T(7) = 72 \cdot 10\text{ s} = 720\text{ s} = 12\text{ min} \end{aligned}$$