Aufgabe 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(a) $A\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4\vec{u}$

(b) $A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda\vec{v}$

Aufgabe 2

Ist $\lambda = 7$ Eigenwert von $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$?

λ ist Eigenwert von $A \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0$

$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = 30 - 30 = 0$

Da ferner der zu $\lambda = 7$ gehörende Eigenvektor gesucht ist, können wir auch direkt nach einer Lösung $\vec{v}$ der Gleichung $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ suchen:

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} -6x + 6y = 0 \\ 5x - 5y = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da es einen Eigenvektor gibt, muss $\lambda = 7$ auch ein Eigenwert sein.

Aufgabe 3

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ und $\lambda = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \stackrel{\text{rref}}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ EV}$$

$$\begin{array}{l} 2x - y + 6z = 0 \\ 2x - y + 6z = 0 \\ 2x - y + 6z = 0 \end{array} \quad \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \quad E = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$(*)$ setze jede freie Variable null ($z = 0$ und $y = 0$)

Geometrische Deutung: Jeder Punkt P der „Eigenebene“ E wird durch A auf den Punkt $P' \in E$ mit $\vec{r}_{P'} = 2\vec{r}_P$ abgebildet.

Aufgabe 4

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) *Methode 1:* Teste, ob $\det(A - 5I) = 0$ gilt.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{TR}}{=} -20 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{5 ist kein Eigenwert von } A$$

Methode 2: Überprüfe, ob $(A - 5I)$ einen Rang kleiner als 3 hat; d. h. ob die Zeilen linear abhängig sind.

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{=} \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{5 kein Eigenwert von } A$$

(b) Ist $\vec{v}$ Eigenvektor von A, so gilt:

$$\begin{aligned} A^3\vec{v} &= A^2(A\vec{v}) = A^2\lambda\vec{v} = \lambda A(A\vec{v}) = \lambda A(\lambda\vec{v}) = \lambda^2 A\vec{v} \\ &= \lambda^2(\lambda\vec{v}) = \lambda^3\vec{v} \quad \text{(Herleitung war nicht verlangt)} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-6-\lambda) - 9 &= 0 \\ \lambda^2 + 4\lambda - 21 &= 0 \\ (\lambda - 3)(\lambda + 7) &= 0 \\ \lambda_1 &= 3 \\ \lambda_2 &= -7 \end{aligned}$$

$$\lambda = 3\text{:} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -x + 3y &= 0 \\ 3x - 9y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -7\text{:} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 9x + 3y &= 0 \\ 3x + y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0+2) - 4(3-2) + 0 = 4 - 4 = 0$$

Aufgabe 7

$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \cdots = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 6$

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 6 \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ linear unabhängig $\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^n = PDP^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 6^n \\ -2 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2 \cdot 6^n & -3 + 3 \cdot 6^n \\ -2 + 2 \cdot 6^n & 2 + 3 \cdot 6^n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \cdots = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$\lambda_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Da es nur einen Eigenvektor gibt, ist A ist nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 9

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-2)((3-\lambda)^2-1)$$

$$0 = (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2\text{:}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{oder } \vec{v}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 4\text{:}\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v}_3$ sind linear unabhängig

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2^n & 2^n & 0 \\ -3\cdot 2^n & 0 & 4^n \\ 0 & -3\cdot 2^n & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \dots \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\cdot 2^n & 0 & 0 \\ 3\cdot 4^n - 3\cdot 2^n & 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 3\cdot 4^n - 3\cdot 2^n & 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 10

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 5 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (0-\lambda)\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} - 5\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 = (-\lambda)((2-\lambda)(4-\lambda)-3) - 5((2-\lambda)-2) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 = \lambda^2(6-\lambda)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 6$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0\text{:}\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 6\text{:}\ \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Da A keine Basis aus Eigenvektoren hat, ist A nicht diagonalisierbar