Eigenwerte- und Eigenvektoren Lösungen Kurzversion

Das Eigenwertproblem

Gegeben: quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Beispiel 1

Sind $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$?

$A \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ja (EW $\lambda_1 = 5$)

$A \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ja (EW $\lambda_2 = 0$)

Systematische Bestimmung der Eigenwerte

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \lambda\vec{v} \\ A\vec{v} - \lambda\vec{v} &= \vec{0} \\ A\vec{v} - \lambda I\vec{v} &= \vec{0} \quad (I\text{: Einheitsmatrix}) \\ (A - \lambda I)\vec{v} &= \vec{0} \quad (*) \end{aligned}$$

- $(A - \lambda I)$ invertierbar $\Rightarrow$ nur $\vec{v} = \vec{0}$ löst $(*)$ *uninteressant!*
- $(A - \lambda I)$ nicht invertierbar $\Rightarrow$ $(*)$ hat Lösungen $\vec{v} \neq \vec{0}$

  $(A - \lambda I)$ nicht invertierbar $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

Beispiel 2

Bestimme die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$

$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$

Beispiel 3

Berechne die Eigenvektoren (Eigenräume) der Matrix aus Beispiel 2.

Es muss $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ gelten.

$$\lambda_1 = 1\text{:} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ Eigenraum von } \lambda_1$$

$$\lambda_1 = 4\text{:} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -x + 2y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ Eigenraum von } \lambda_2$$

Satz 1

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

- Das Produkt aller Eigenwerte von A ist gleich $\det(A)$.
- Die Summe aller Eigenwerte von A ist gleich $\operatorname{tr}(A)$.

Pro Memoria: Die *Spur* $\operatorname{tr}(A)$ einer quadratischen Matrix A ist die Summe aller Diagonalemente von A.

Beispiel 4

Überprüfe die Eigenwerte von Beispiel 2.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$

$\det(A) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \cdot 4 = 4$ (stimmt)

$\operatorname{tr}(A) = 3 + 2 = 5$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 4 = 5$ (stimmt)

Satz 2

Ist A eine quadratsche Matrix mit einem Eigenwert λ und dem zugehörigen Eigenvektor $\vec{v}$, dann gilt:

- λ^n ist Eigenwert von A^n.
- $\vec{v}$ ist Eigenvektor von A^n.

Beweis:

$A^2\vec{v} = A(A\vec{v}) = A\lambda\vec{v} = \lambda A\vec{v} = \lambda\lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$

$A^3\vec{v} = A(A^2\vec{v}) = A\lambda^2\vec{v} = \lambda^2 A\vec{v} = \lambda^2\lambda\vec{v} = \lambda^3\vec{v}$

...

$A^n\vec{v} = A(A^{n-1}\vec{v}) = A\lambda^{n-1}\vec{v} = \lambda^{n-1}A\vec{v} = \lambda^{n-1}\lambda\vec{v} = \lambda^n\vec{v}$

Beispiel 5

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und A^2.

$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$

$2 - \lambda = \pm 1$

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{array} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte und Eigenvektoren von A^2:

$\lambda_1 = 1^2 = 1$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = 3^2 = 9$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Diagonalisierung quadratischer Matrizen

Ziel: einfache Berechnung von A^n für grosse n

Voraussetzungen: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

$P \overset{\text{Def.}}{=} (\vec{v}_1|\vec{v}_2|\ldots|\vec{v}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aus den n Eigenvektoren

$D \overset{\text{Def.}}{=} (\lambda_1\vec{e}_1|\lambda_2\vec{e}_2|\ldots|\lambda_n\vec{e}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Standardbasis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$

$AP = A(\vec{v}_1|\ldots|\vec{v}_n) = (A\vec{v}_1|\ldots|A\vec{v}_n) = (\lambda_1\vec{v}_1|\ldots|\lambda_n\vec{v}_n)$

$PD = P(\lambda_1\vec{e}_1|\ldots|\lambda_n\vec{e}_n) = (\lambda_1 P\vec{e}_1|\ldots|\lambda_n P\vec{e}_n) = (\lambda_1\vec{v}_1|\ldots|\lambda_n\vec{v}_n)$

$\Rightarrow AP = PD \quad \overset{*}{\Rightarrow} \quad A = PDP^{-1} \quad \text{und} \quad D = P^{-1}AP$

$(*)$ Wenn alle Eigenvektoren linear unabhängig sind, ist P invertierbar.

Satz 3

Wir fassen zusammen: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit n linear unabhängigen Eigenvektoren so lässt sich A wie folgt als Produkt darstellen:

$A = PDP^{-1}$

Dabei sind $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix aus den n Eigenvektoren von A und D die Diagonalmatrix mit den n korrespondierenden Eigenwerten auf der Diagonalen.

Berechnen von Matrixpotenzen für grosse n

Beim Berechnen von A^n mit Satz 3 lassen sich aufgrund des Assoziativgesetzes die Produkte $P \cdot P^{-1}$ zusammenfassen und „wegkürzen“.

$$A^n = \underbrace{PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1}}_{n \text{ Faktoren}} = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}D \cdot \ldots \cdot D \cdot \underbrace{(P^{-1}P)}_{I}DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

Beispiel 6

Zeige, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 2 diagonalisierbar ist und berechne A^n.

Die Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 1$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = 4$ sind linear unabhängig.

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 4^n \\ -1 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \cdot 4^n + 1 & 2 \cdot 4^n - 2 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$