# Eigenwerte- und Eigenvektoren **Kurzversion**

## Das Eigenwertproblem

Gegeben: quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

## Beispiel 1

Sind $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$?

## Systematische Bestimmung der Eigenwerte

$$\begin{aligned}
A\vec{v} &= \lambda\vec{v}\\
A\vec{v} - \lambda\vec{v} &= \vec{0}\\
A\vec{v} - \lambda I\vec{v} &= \vec{0} \quad (I\text{: Einheitsmatrix})\\
(A - \lambda I)\vec{v} &= \vec{0} \quad (*)
\end{aligned}$$

- $(A - \lambda I)$ invertierbar $\Rightarrow$ nur $\vec{v} = \vec{0}$ löst $(*)$ *uninteressant!*
- $(A - \lambda I)$ nicht invertierbar $\Rightarrow$ $(*)$ hat Lösungen $\vec{v} \neq \vec{0}$

  $(A - \lambda I)$ nicht invertierbar $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

## Beispiel 2

Bestimme die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$

**Beispiel 3**

Berechne die Eigenvektoren (Eigenräume) der Matrix aus Beispiel 2.

**Satz 1**

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

- Das Produkt aller Eigenwerte von $A$ ist gleich $\det(A)$.
- Die Summe aller Eigenwerte von $A$ ist gleich $\operatorname{tr}(A)$.

*Pro Memoria:* Die *Spur* $\operatorname{tr}(A)$ einer quadratischen Matrix $A$ ist die Summe aller Diagonalemente von $A$.

**Beispiel 4**

Überprüfe die Eigenwerte von Beispiel 2.

**Satz 2**

Ist $A$ eine quadratsche Matrix mit einem Eigenwert $\lambda$ und dem zugehörigen Eigenvektor $\vec{v}$, dann gilt:

- $\lambda^n$ ist Eigenwert von $A^n$.
- $\vec{v}$ ist Eigenvektor von $A^n$.

*Beweis:*

**Beispiel 5**

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $A^2$.

### Diagonalisierung quadratischer Matrizen

*Ziel:* einfache Berechnung von $A^n$ für grosse $n$

*Voraussetzungen:* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n$ (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und $n$ linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

$P \overset{\text{Def.}}{=} (\vec{v}_1|\vec{v}_2|\ldots|\vec{v}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aus den $n$ Eigenvektoren

$D \overset{\text{Def.}}{=} (\lambda_1\vec{e}_1|\lambda_2\vec{e}_2|\ldots|\lambda_n\vec{e}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Standardbasis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$

$AP = A(\vec{v}_1|\ldots|\vec{v}_n) = (A\vec{v}_1|\ldots|A\vec{v}_n) = (\lambda_1\vec{v}_1|\ldots|\lambda_n\vec{v}_n)$

$PD = P(\lambda_1\vec{e}_1|\ldots|\lambda_n\vec{e}_n) = (\lambda_1 P\vec{e}_1|\ldots|\lambda_n P\vec{e}_n) = (\lambda_1\vec{v}_1|\ldots|\lambda_n\vec{v}_n)$

$\Rightarrow AP = PD \quad \overset{*}{\Rightarrow} \quad A = PDP^{-1} \quad$ und $\quad D = P^{-1}AP$

($*$) Wenn alle Eigenvektoren linear unabhängig sind, ist $P$ invertierbar.

### Satz 3

*Wir fassen zusammen:* Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $n$ linear unabhängigen Eigenvektoren so lässt sich $A$ wie folgt als Produkt darstellen:

$A = PDP^{-1}$

Dabei sind $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix aus den $n$ Eigenvektoren von $A$ und $D$ die Diagonalmatrix mit den $n$ korrespondierenden Eigenwerten auf der Diagonalen.

### Berechnen von Matrixpotenzen für grosse $n$

Beim Berechnen von $A^n$ mit Satz 3 lassen sich aufgrund des Assoziativgesetzes die Produkte $P \cdot P^{-1}$ zusammenfassen und „wegkürzen“.

$$A^n = \underbrace{PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1}}_{n \text{ Faktoren}} = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}D \cdot \ldots \cdot D \cdot \underbrace{(P^{-1}P)}_{I}DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

### Beispiel 6

Zeige, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 2 diagonalisierbar ist und berechne $A^n$.