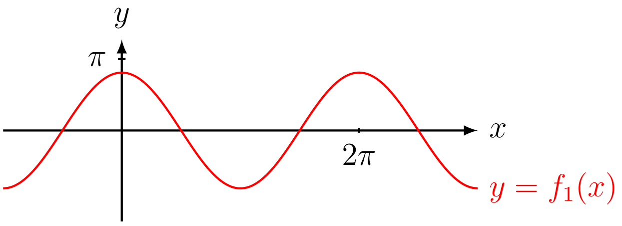
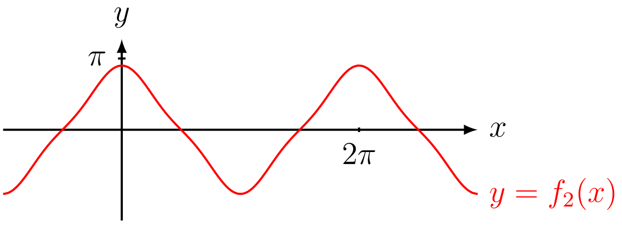
AM4: Fourierreihen Theorie

1 Ausblick

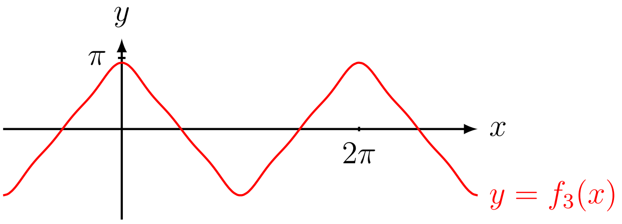
$f_1(x) = \frac{8}{\pi} \cos x$



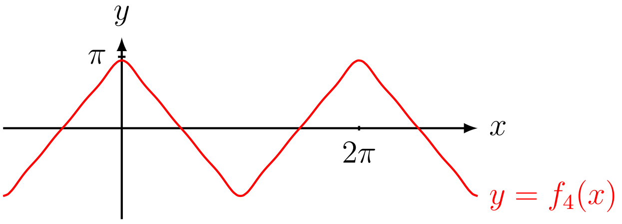
$f_2(x) = \frac{8}{\pi} \cos x + \frac{8}{9\pi} \cos 3x$



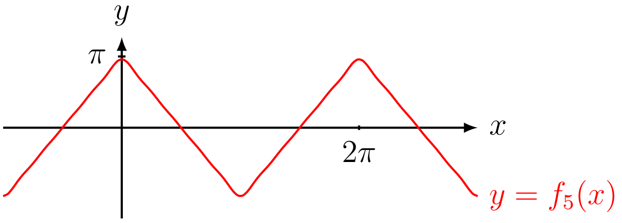
$f_3(x) = \frac{8}{\pi} \cos x + \frac{8}{9\pi} \cos 3x + \frac{8}{25\pi} \cos 5x$

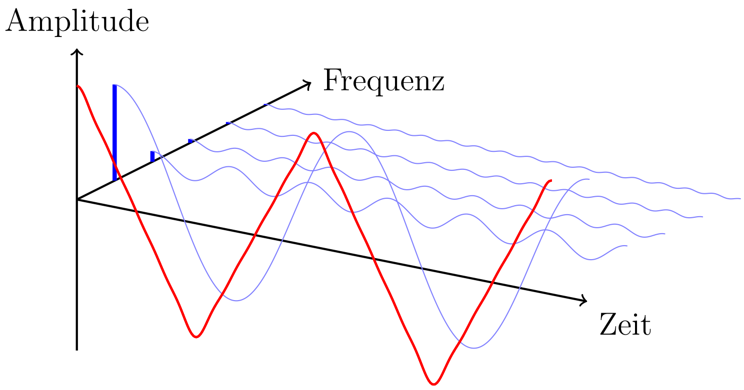


$f_4(x) = \frac{8}{\pi} \cos x + \frac{8}{9\pi} \cos 3x + \frac{8}{25\pi} \cos 5x + \frac{8}{49\pi} \cos 7x$



$f_5(x) = \frac{8}{\pi} \cos x + \frac{8}{9\pi} \cos 3x + \frac{8}{25\pi} \cos 5x + \frac{8}{49\pi} \cos 7x + \frac{8}{81\pi} \cos 9x$





Je mehr Cosinusterme hinzukommen, desto besser wird folgende periodische Funktion dargestellt:

$$f(x) = |2(x - \pi)| - \pi, \quad \text{wenn } 0 \leq x \leq 2\pi$$
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Frage

Lässt sich umgekehrt eine 2π-periodische Funktion f durch eine konvergente trigonometrische Reihe

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big) \\ &= a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \end{aligned} \tag{1}$$

darstellen?

Antwort

2 Grundlagen

2.1 Gerade und ungerade Funktionen

gerade Funktionen

Eine Funktion f heisst *gerade*, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$.

- Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch .
- Integraleigenschaft gerader Funktionen:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

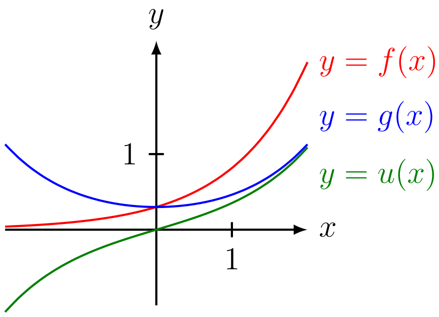
ungerade Funktionen

Eine Funktion f heisst *ungerade*, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$.

- Der Graph einer ungeraden Funktion ist symmetrisch .
- Integraleigenschaft ungerader Funktionen:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

Jede Funktion kann als Summe (Superposition) eines geraden und eines ungeraden Anteils geschrieben werden.



Der Trick:

Beispiele: Gerade oder ungerade?

(a) $f(x) = x^4$

(b) $f(x) = x^{-1}$

(c) $f(x) = 1$

(d) $f(x) = x^6 - 5x^2 - 3$

(e) $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$

(f) $f(x) = \sin 3x$

(g) $f(x) = x^3$

(h) $f(x) = \cos x$

(i) $f(x) = x^5 - 5x^3$

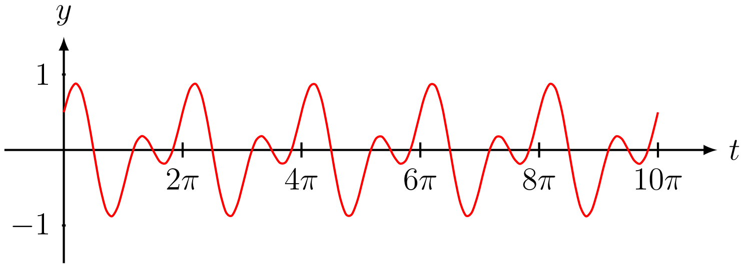
(j) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

(k) $f(x) = \cos(x^3)$

(l) $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

2.2 Periodische Funktionen

Eine Funktion f heisst *periodisch*, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $f(t+T) = f(t)$. Der kleinste solche positive Wert T heisst *Periode* der Funktion f. Bei zeitabhängigen periodischen Funktionen (=Schwingungen), wird T auch *Schwingungsdauer* genannt.



Integraleigenschaft periodischer Funktionen

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Beispiele

Bestimme die Periode T der Funktion.

(a) $f(t) = \sin(t)$

(b) $f(t) = \sin(\omega t)$

(c) $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad f(t+2) = f(t)$

$\Rightarrow$

2.3 Stückweise Stetigkeit

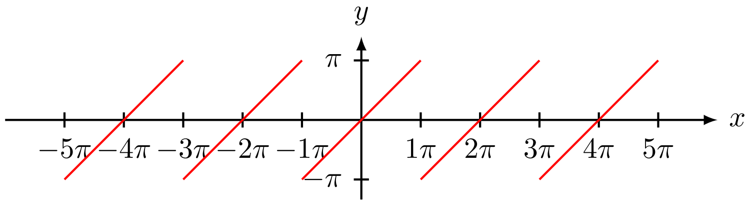
Eine Funktion f heisst auf dem Invervall $[a,b]$ stückweise stetig, wenn f stetig ist bis auf endlich viele Sprungstellen.

Die charakteristische Grössen einer Sprungstelle x_0 sind die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte

- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

„Sägezahnfunktion"

$f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$



Sprungstellen: $x_k =$

- $\lim\limits_{x \to x_k^-} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to x_k^+} f(x) =$

2.4 Produkte trigonometrischer Funktionen

Formeln, Tabellen, Begriffe: S. 99

$\sin\alpha \cdot \sin\beta =$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta =$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta =$

Beispiele

(a) $\cos(5t) \cdot \cos(3t) =$

(b) $\sin(4t) \cdot \sin(3t) =$

(c) $\sin(3t) \cdot \cos(2t) =$

(d) $\cos(3t) \cdot \sin(3t) =$

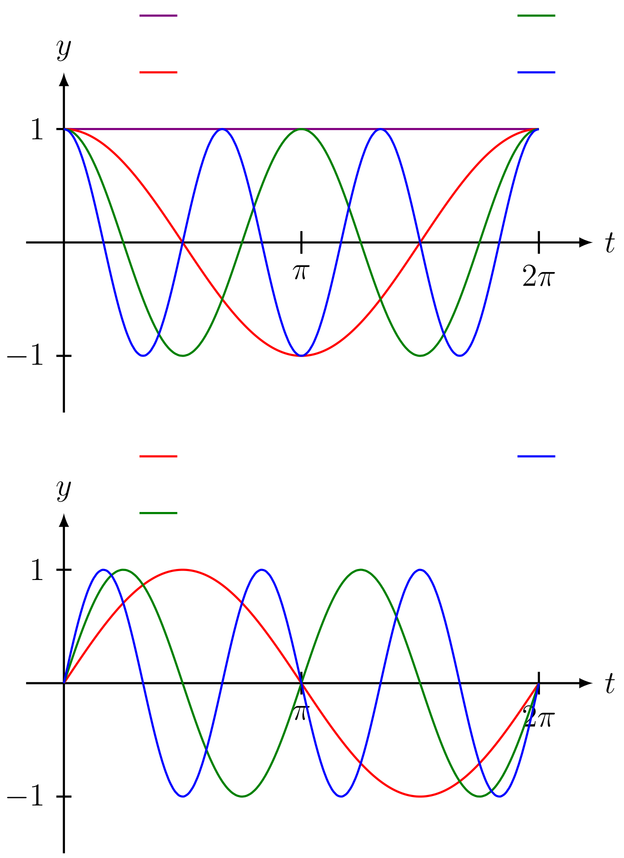
2.5 Die Basisfunktionen der Fourierreihe

Behauptung: jede T-periodische Funktion lässt sich als Überlagerung (*Superposition*) von – möglicherweise unendlich vielen – Sinus- und Cosinusfunktionen darstellen, wobei nur ganz bestimmte Frequenzen ω vorkommen:

$$\omega = 0, \frac{2\pi}{T}, \frac{4\pi}{T}, \frac{6\pi}{T}, \ldots$$

Beispiele

Erkenne in den folgenden beiden Diagrammen die oben beschriebenen Basisfunktionen für $T = 2\pi$ und schreibe sie an.



Die Integrale der Basisfunktionen sind sehr einfach zu bestimmen, wenn man über eine ganze Periode $T = 2\pi$ integriert.

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt)\,\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\,\mathrm{d}t =$$

Mit Hilfe des letzten Abschnitts können wir zeigen, dass die Basisfunktionen

$$\begin{aligned}
&c_0(t) = 1 \\
&c_1(t) = \cos t && s_1(t) = \sin t \\
&c_2(t) = \cos 2t && s_2(t) = \sin 2t \\
&c_3(t) = \cos 3t && s_3(t) = \sin 3t \\
&\ldots = \ldots && \ldots = \ldots
\end{aligned}$$

ein *Ortogonalsystem* bilden. Was heisst das?

Diesen Begriff kennen wir bereits aus der Vektorgeometrie. Dort bilden beispielsweise die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Orthogonalsystem im R^3, weil sie paarweise senkrecht zueinander stehen. Dies erkennt man daran, dass das *Skalarprodukt*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{3} (u_i \cdot v_i)$$

der entsprechenden Vektoren verschwindet.

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle =$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle =$$

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle =$$

Auch für periodische Funktionen f und g lässt sich ein Skalarprodukt qdefinieren:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot g(t) \, \mathrm{d}t$$

Damit kann man sagen, dass zwei Funktionen senkrecht (orthogonal) zueinander stehen, wenn gilt:

$$\langle f, g \rangle =$$

Welche unserer Basisfunktionen stehen paarweise orthogonal zueinander?

Sinus gegen Cosinus

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt) \cdot \cos(nt) \, \mathrm{d}t$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Sinus gegen Sinus

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt) \cdot \sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

$=$

$=$

$=$

Cosinus gegen Cosinus

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cdot \cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

$=$

$=$

$=$

Zusammenfassung

Die Funktionen

- $c_m(t) = \cos(m \cdot t)$ mit $m \geq 0$
- $s_n(t) = \sin(n \cdot t)$ mit $n \geq 1$

bilden ein *Orthogonalsystem*.

Wegen $\langle c_m, c_m \rangle \neq 1$ und $\langle s_n, s_n \rangle \neq 1$ bilde sie kein *Orthonormalsystem*.

2.6 Partielle Integration

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

3 Die Berechnung der Fourierkoeffizienten

Ist f eine geeignete periodische Funktion, so suchen wir *Fourierkoeffizienten* a_k und b_k, so dass f als trigonometrische Reihe dargestellt werden kann:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad \text{mit} \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T} \tag{3.1}$$

Beträgt die Schwingungsdauer $T = 2\pi$, so ist $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{2\pi} = k$ und Gleichung (3.1) lässt sich vereinfachen:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{3.2}$$

3.1 Bestimmung der a_n

Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}_0$ multipliziert man beide Seiten der Gleichung (3.2) mit $\cos nt$ und integriert von 0 bis 2π:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right] \cos nt \, \mathrm{d}t$$

Wie man später sehen wird, ist die obige Reihe konvergent. Deshalb gilt das Distributivgesetz für die unendliche Summe.

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt \cos nt + b_k \sin kt \cos nt) \, \mathrm{d}t$$

Aus dem gleichen Grund dürfen wir die Summe und Integral vertauschen und die Koeffizienten vor das Integral ziehen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, \mathrm{d}t = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \cos nt \, \mathrm{d}t \right) \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_k \int_0^{2\pi} \sin kt \cdot \cos nt \, \mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \cos nt \, \mathrm{d}t \right)$$

1. Fall $(n = 0)$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos 0 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \cos 0 \,\mathrm{d}t \right)$$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos kt \,\mathrm{d}t \right)$$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \,\mathrm{d}t = a_0 \cdot 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \,\mathrm{d}t$$

2. Fall $(n \neq 0)$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \cos nt \,\mathrm{d}t \right)$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t = a_n \cdot \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t$$

3.2 Bestimmung der b_n

Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}_0$ multiplizieren wir nun beide Seiten der Gleichung (3.2) mit $\sin nt$ und integrieren von 0 bis 2π:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right] \sin nt \,\mathrm{d}t$$

Wieder gilt das Distributivgesetz für die unendliche Summe.

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt \sin nt + b_k \sin kt \sin nt) \,\mathrm{d}t$$

Integral mit Summe und Koeffizienten vertauschen:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \sin nt \,\mathrm{d}t \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_k \int_0^{2\pi} \sin kt \cdot \sin nt \,\mathrm{d}t \right)$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_k \int_0^{2\pi} \sin kt \cdot \sin nt \,\mathrm{d}t \right)$$

1. Fall $(n = 0)$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin 0\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\left(b_k\int_0^{2\pi}\sin kt\cdot\sin 0\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\left(b_k\int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}t\right)$$

$$0 = b_0\cdot 0$$

$$b_0 = 0 \quad \text{(willkürlich)}$$

2. Fall $(n \neq 0)$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\left(b_k\int_0^{2\pi}\sin kt\cdot\sin nt\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = b_n\cdot\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

3.3 Zusammenfassung:

Die Fourierkoeffizienten a_n, b_n der Reihe

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)$$

bestimmt man wie folgt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t$$

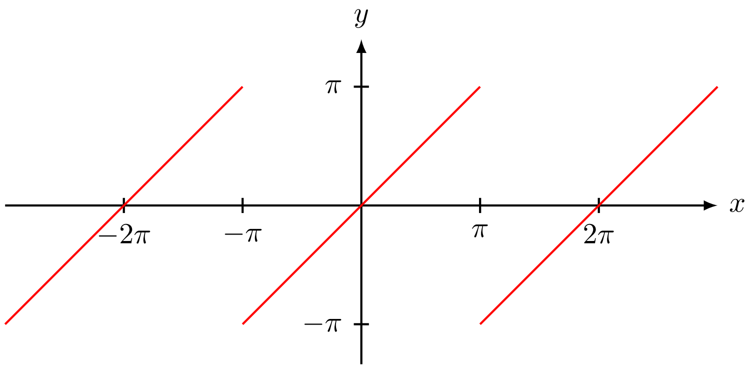
$$b_0 = 0 \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

Siehe *Formeln, Begriffe und Tafeln*, Seite 80

4 Beispiele

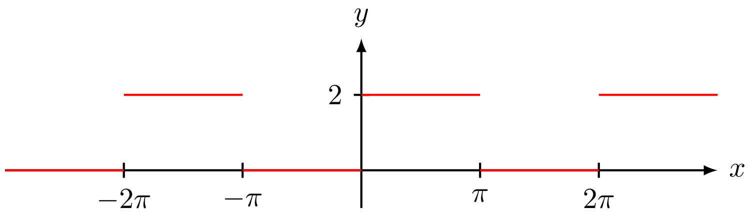
4.1 Sägezahn

$f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$



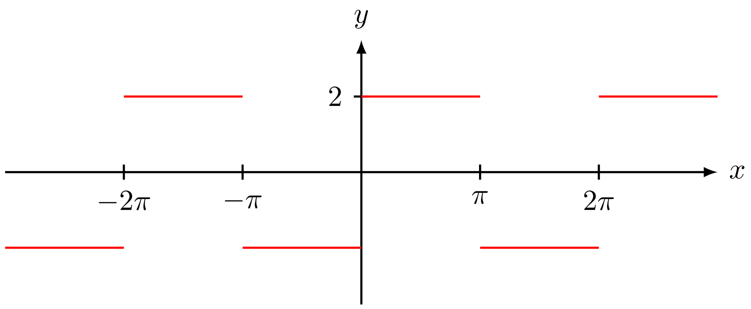
4.2 Treppenfunktion (1)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$



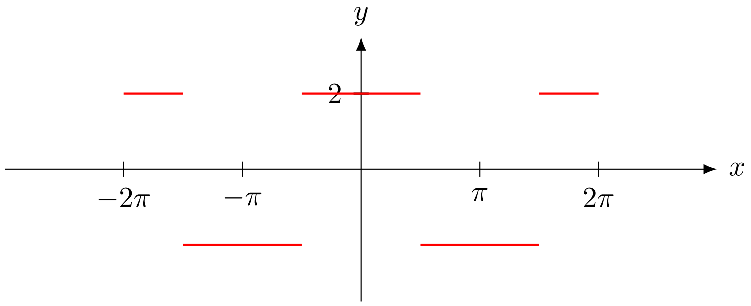
4.3 Treppenfunktion (2)

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 < x < \pi \\ -2 & \text{für } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$



4.4 Treppenfunktion (3)

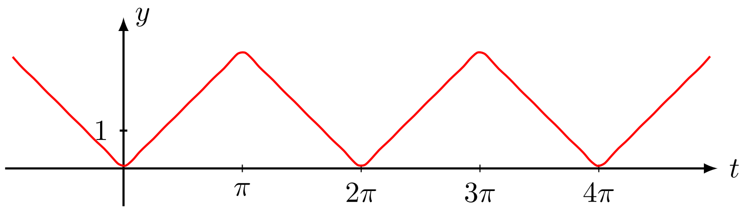
$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -2 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ 2 & \text{für } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}$$

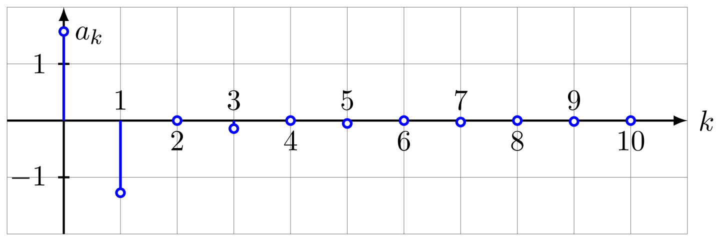


5 Frequenzdarstellung von Fourierreihen

Beispiel 1

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos t + \frac{4}{9\pi}\cos 3t - \frac{4}{25\pi}\cos 5t + \ldots$$





Beispiel 2

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos t + \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{2}{9\pi}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{2}{25\pi}\cos 5t - \ldots$$