Aufgabe 5.1

- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Also beträgt der Index $k = 3$

Aufgabe 5.2

(a) $A + B = B + A$ *wahr*

(b) $AB = BA$ *falsch*

(c) $(A + B)^T = A^T + B^T$ *wahr*

(d) $(AB)^T = A^T B^T$ *falsch*

(e) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$ *wahr*

(f) $AB = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$ oder $B = 0$ *falsch*

Aufgabe 5.3

Eine Matrix A ist *idempotent*, wenn $A \cdot A = A$ gilt.
Wegen $A^2 = A$ ist eine idempotente Matrix auch periodisch mit $k = 1$.

$$\begin{pmatrix} 4 & a \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 + ab & 4a + a^2 \\ 4b + ab & ab + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & a \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das (nichtlineare) Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcrl} 16 + ab = 4 & & ab + 12 = 0 & (1) \\ 4a + a^2 = a & \Rightarrow & a(3 + a) = 0 & (2) \\ 4b + ab = b & & b(3 + a) = 0 & (3) \\ ab + a^2 = a & & a(b + a - 1) = 0 & (4) \end{array}$$

Aus (1) folgt $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

Aus (2) oder (3) folgt $a = -3$.

Aus (4) und $a = -3$ folgt $b = 4$.

Aufgabe 5.4

(a) Die Periode k einer Matrix A ist die kleinste natürliche Zahl, welche die Gleichung $A^k + 1 = A$ erfüllt.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = I_4 \quad \Rightarrow \quad A^5 = A \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

(b) A ist periodisch mit $k = 4$: $A^{999} = A^{999 \bmod 4} = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Der TI-30X Pro liefert den Divisionsrest mit der Funktion `mod(a, b)` aus dem `math/NUM`-Menü.

Aufgabe 5.5

$$\left(I - 2A^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \quad || \quad \text{invertieren}$$

$$\left(\left(I - 2A^T\right)^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$I - 2A^T = \frac{1}{5 \cdot 3 - (-2) \cdot (-8)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} = 2A^T$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = 2A^T$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.1

(a) Elementarmatrix; das 2-fache der 3. Zeile wird zur 2. Zeile addiert.

(b) keine Elementarmatrix; eine Elementarmatrix darf nur aus *einer* Zeilenvertauschung bestehen.

(c) Elementarmatrix; die zweite Zeile mit 4 multiplizieren.

Aufgabe 6.2

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

- Addiere das 3-fache der 1. Zeile zur 2. Zeile
- Addiere die 2-fache der 1. Zeile zur 3. Zeile

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

- Addiere das (-1)-fache der 2. Zeile zur 3. Zeile

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

- Addiere das 2-fache der 3. Zeile zur 2. Zeile
- Addiere die 3. Zeile zur 1. Zeile

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

- Addiere die 2. Zeile zur 1. Zeile.

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.3

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

- Addiere die 1. Zeile zur 2. Zeile:
- Addiere das (-2)-fache der 1. Zeile zur 4. Zeile:

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

- Addiere das (-4)-fache der 2. Zeile zur 3. Zeile:

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

- Vertausche die 3. und 4. Zeile:

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

Addiere das (-4)-fache von Zeile 3 zur Zeile 4:

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & -4 \end{array}$$

die 4. Zeile in der linken Matrix ist die Nullzeile. Also ist A nicht invertierbar.

Aufgabe 7.1

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.2

- Koordinatensystem verschieben: $(y = 3 \to y = 0)$

  $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Spiegelung an der x-Achse:

  $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verschiebung des Koordinatensystems rückgängig machen.

  $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Insgesamt: $T^{-1}ST = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Reihenfolge!)

Aufgabe 7.3

- Koordinatensystem verschieben, damit $Z(-2, 5) \to O(0, 0)$:

  $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Streckung am Ursprung:

  $$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verschiebung des Koordinatensystems rückgängig machen.

  $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Insgesamt: $T^{-1}ST = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Reihenfolge!)

Aufgabe 8.1

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Zeilen 1 und 3 sind identisch.

(b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

Zwei Zeilenvertauschungen bringen A auf Dreiecksform.

(c) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Zeilen 1 und 3 sind linear abhängig.

Aufgabe 8.2

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 7 = -84$$

Aufgabe 8.3

$\det A = a^2 - b^2$

Aufgabe 8.4

(a) $\det A^T = \det A = -2$

(b) $\det 3A = 3^4 \cdot \det A = 81 \cdot (-2) = -162$

(c) $\det A^{-1} = 1/\det A = -0.5$

(d) $\det AB = \det A \cdot \det B = (-2) \cdot 3 = -6$

Aufgabe 8.5

Entwickle die Determinante nach der zweiten Kolonne:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & 0 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & b \end{vmatrix} - 0 + a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= -b(b^2 - a) - a(a^2 - b) = 2ab - a^3 - b^3$$

Oder mit der Regel von Sarrus (Jägerzaunregel):

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ a & b & 1 & a & b & \\ b & 0 & a & b & 0 & \\ 1 & a & b & 1 & a & \end{array}$$

$\det A = 0 + ab + ab - 0 - a^3 - b^3 = 2ab - a^3 - b^3$

Achtung: Diese Regel gilt nur für (3×3)-Matrizen!

Aufgabe 8.6

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ b & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a \left(b \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 1 \end{vmatrix} \right) + b \left(1 \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 1 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= a\,(b \cdot 1 - a \cdot (-ab)) + b\,(1 \cdot (-ab) - b \cdot b)$$

$$= a^3 b - ab^2 - ab + b^3$$

Aufgabe 8.7

Da Spaltenoperationen die Determinante einer Matirix in gleicher Weise (nicht) verändern, wie dies Zeilenoperationen tun, können wir hier das doppelte der dritten Spalte von der ersten subtrahieren, um dort zwei Nullen zu gewinnen. Diese Lösung hat den zusätzlichen Vorteil, dass die Determinate bereits faktorisiert ist.

$$\begin{vmatrix} 2 & t & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ t & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ t-4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (t-4) \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (t-4)(t-1)$$

Natürlich kann man die Determinante nach einer geeigneten Zeile/Spalte entwickeln oder die Jägerzaunregel (Sarrus) anwenden.

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \\ (t-4)(t-1) &= 0 \\ t_1 &= 1 \\ t_2 &= 4 \end{aligned}$$

A ist regulär für $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$.