

Aufgabe 5.1

Zeige, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ nilpotent ist und bestimme ihren Index k .

Aufgabe 5.2

A , B und C sind $n \times n$ -Matrizen, 0 ist die $n \times n$ -Nullmatrix. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, d. h. allgemein gültig?

- (a) $A + B = B + A$
- (b) $AB = BA$
- (c) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (d) $(AB)^T = A^T B^T$
- (e) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- (f) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ oder $B = 0$

Aufgabe 5.3

Für welche Werte der Parameter a und b ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & a \end{pmatrix}$ idempotent?

Aufgabe 5.4

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist periodisch.

- (a) Bestimme die Periode k von A .
- (b) Bestimme A^{999} .

Aufgabe 5.5

Bestimme die Matrix A , welche die Gleichung

$$(I - 2A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Aufgabe 6.1

Handelt es sich bei der gegebenen Matrix um eine Elementarmatrix? Wenn ja, welche Zeilenoperation stellt sie dar?

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.2

Bestimme mit elementaren Zeilenumformungen die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

oder stelle fest, dass A nicht invertierbar ist.

Aufgabe 6.3

Bestimme mit elementaren Zeilenumformungen die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

oder stelle fest, dass A nicht invertierbar ist.

Aufgabe 7.1

Gib die Matrix der Abbildung an, die einen Punkt $P(x, y) \dots$

- (a) an der Geraden $y = x$ spiegelt,
- (b) um 90° um den Ursprung dreht,
- (c) senkrecht auf die x -Achse projiziert,
- (d) um den Vektor $\vec{v} = (3, -2)^T$ verschiebt.

Verwende, falls nötig, Matrizen für homogene Koordinaten.

Aufgabe 7.2

Gib die Matrix der Abbildung an, die einen Punkt P in der Ebene an der Geraden $y = 3$ spiegelt. Verwende, falls nötig, Matrizen für homogene Koordinaten.

Aufgabe 7.3

Gib die Matrix der Abbildung an, die einen Punkt P mit dem Faktor $k = 3$ am Zentrum $Z(-2, 5)$ streckt. Verwende, falls nötig, Matrizen für homogene Koordinaten.

Aufgabe 8.1

Bestimme die Determinante der Matrix durch „Hinsehen“.

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.2

Berechne die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ mittels elementarer Zeilenumformungen.

Aufgabe 8.3

Bestimme die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8.4

Für zwei invertierbare 4×4 -Matrizen A und B gilt $\det A = -2$ und $\det B = 3$. Bestimme

$$(a) \det A^T$$

$$(c) \det A^{-1}$$

$$(b) \det 3A$$

$$(d) \det AB$$

Aufgabe 8.5

Berechne und vereinfache die Determinante von $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ b & 0 & a \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8.6

Berechne die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ b & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

mit der Kofaktorregel und vereinfache das Resultat.

Aufgabe 8.7

Bestimme den Wert des Parameters t so, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ t & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

regulär ist.