Aufgabe 1.1

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}\,x_3 = 1$ *linear*

(b) $x_1 + 3x_2 + x_1x_2 = 2$ *nicht linear (wegen $x_1 \cdot x_2$)*

(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$ *linear*

(d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$ *nicht linear (wegen x_1^{-2})*

Aufgabe 1.2

$3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7.$

$x_1 = \frac{5}{3}s - \frac{4}{3}t + \frac{7}{3}$

$x_2 = s$

$x_3 = t$

Aufgabe 1.3

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.4

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

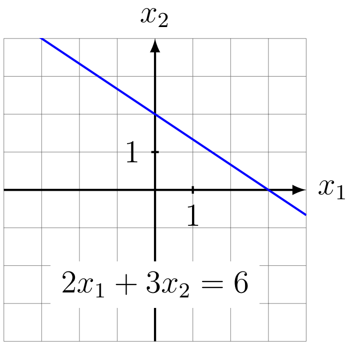
Aufgabe 1.5

$x_1 = 7 + 5x_2 - 4x_3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

Aufgabe 1.6

Ein lineares Gleichungssystem mit mindestens einer Lösung.

Aufgabe 1.7



Aufgabe 2.1

(a) Ja

(b) Nein (Das führende Element in Zeile 2 ist keine 1.)

(c) Nein (Die Nullzeile steht nicht am unteren Ende.)

Aufgabe 2.2

(a) Ja

(b) Nein (Über der führenden 1 in Zeile 2 stehen nicht nur Nullen.)

(c) Ja

Aufgabe 2.3

$x_1 = -5$
$x_2 = 4$
$x_3 = 1$

Aufgabe 2.4

Das lineare Gleichungssystem ist inkonsistent. (Wegen der letzte Matrixzeile $0 = 1$.)

Aufgabe 2.5

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 - 5x_4 \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 1 - 4x_4 \\ x_4 &= t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2s - 5t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 1 - 4t \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

Aufgabe 2.6

$x_3 = 4$
$x_2 = 7 - 3 \cdot 4 = -5$
$x_1 = -6 + 2 \cdot (-5) - 8 = -24$

Aufgabe 2.7

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tausche Zeilen 1 und 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Addiere das -4-fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das -3-fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Addiere das 1-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 3 mit $\frac{1}{7}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Addiere das -1-fache von Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Addiere das -1-fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 3 - 5t$

$x_2 = -2 + 3t$

$x_3 = -1 + t$

$x_4 = t$

Aufgabe 2.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das -3-fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 2 mit -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Addiere das -2-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist inkonsistent.

Aufgabe 2.9

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Addiere das -2-fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das -3-fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

Addiere das -1-fache von Zeile 1 zur Zeile 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Tausche Zeilen 2 und 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 2 mit -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziere Zeile 4 mit $\frac{1}{4}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das 2-fache von Zeile 4 zur Zeile 1:

Addiere das 5-fache von Zeile 4 zur Zeile 2:

Addiere das -8-fache von Zeile 4 zur Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das -1-fache von Zeile 3 zur Zeile 1:

Addiere das -5-fache von Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das -1-fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -23$, $x_2 = 31$, $x_3 = -4$, $x_4 = 0$

Aufgabe 2.10

(a) Ja, denn das Gleichungssystem besteht aus zwei Gleichungen mit drei Variablen und hat daher freie Variablen.

(b) Nein, denn das zur Matrix gehörenden Gleichungssystem ist in Zeilenstufenform. und hat keine freien Variablen.

Aufgabe 3.1

(a) $\dim(A) = 3 \times 5$

(b) $a_{2,3} = 0$

(c) $a_{3,2} = 0$

(d) $a_{4,5}$ ist nicht definiert

Aufgabe 3.2

(a) $\dim(A \cdot B) = 3 \times 3$

(b) $\dim(B \cdot A) = 4 \times 4$

(c) $\dim(A \cdot A^T \cdot C) = 3 \times 2$

(d) $\dim(B \cdot C) = \times 4 \times 2$

(e) $\dim(C \cdot D)$ nicht definiert

(f) $\dim((D^T \cdot D)^{10}) = 4 \times 4$

Aufgabe 3.3

$AX = B$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4

(a) $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix} = 1 + 7 + -1 = 7$

(b) $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}^T = 1 + 7 + -1 = 7$

(c) $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert

Aufgabe 3.5

(a) $2A + B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

(c) $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

(d) $A^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}} = (BA)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

(e) $\operatorname{tr}(C) = c_{11} + c_{22} = 1 + 2 = 3$

(f) Die Spur ist nicht definiert, da BC nicht quadratisch ist.

Aufgabe 3.6

Damit die Aufgabe sinnvoll lösbar ist, sollte die Matrix periodisch oder nilpotent sein. Durch Probieren erhält man:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Also gilt: $A = A^1 = A^3 = A^5 = \ldots$ und damit:

$$A^{100} = A^{99} \cdot A = A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.1

Körnermasse am Tag k: A_k, B_k, C_k

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 0.2A_k + 0.1B_k + 0.2C_k \\ B_{k+1} &= 0.5A_k + 0.5B_k + 0.2C_k \\ C_{k+1} &= 0.3A_k + 0.4B_k + 0.6C_k \end{aligned}$$

Übergangsmatrix: $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \to [A]$

Anfangsbestand $\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} \to [B]$

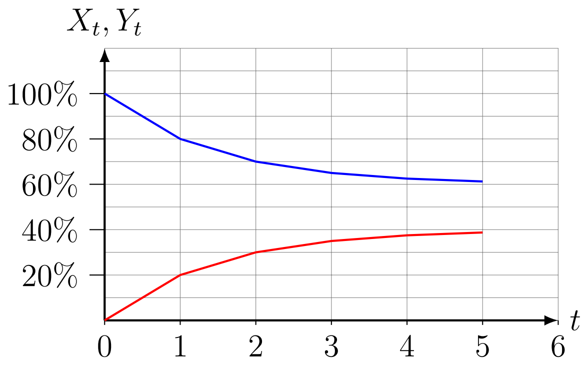
TR: $[A]^{50} * [B] = \begin{pmatrix} 98.6 \\ 213.7 \\ 287.7 \end{pmatrix}$ [in Gramm]

Aufgabe 4.2

(a) $\begin{aligned} X_{t+1} &= 0.8X_t + 0.3Y_t \\ Y_{t+1} &= 0.2X_t + 0.7Y_t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$

(b) Konzentrationskurven:

Mit $C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $C_k = A^k C_0$



(c) Gleichgewicht: $C_\infty \approx A^{50} C_0 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4.3

(a) Übergangsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) langfristige Entwicklung:

nach 10 Zyklen:

$$A^{10} \approx \begin{pmatrix} 1.64 \cdot 10^{-1} & 1.54 \cdot 10^{0} & 1.66 \cdot 10^{0} \\ 1.66 \cdot 10^{-2} & 1.64 \cdot 10^{-1} & 2.18 \cdot 10^{-1} \\ 8.70 \cdot 10^{-3} & 6.66 \cdot 10^{-2} & 7.68 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

nach 100 Zyklen:

$$A^{100} \approx \begin{pmatrix} 5.5 \cdot 10^{-5} & 5.0 \cdot 10^{-4} & 6.0 \cdot 10^{-4} \\ 6.0 \cdot 10^{-6} & 5.5 \cdot 10^{-5} & 6.5 \cdot 10^{-5} \\ 2.6 \cdot 10^{-6} & 2.4 \cdot 10^{-5} & 2.9 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Die Population wird langfristig aussterben.

(c) Stabilitätsbedingung: $A\vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0 & f_1 & 10 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_1 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 &= x_0 && (1) \\ 0.1 \cdot x_0 &= x_1 && (2) \\ 0.4 \cdot x_1 &= x_2 && (3) \end{aligned}$$

(2) $x_1 = 0.1 \cdot x_0$

(3) $x_2 = 0.4 \cdot x_1 = 0.04 \cdot x_0$

in (1) einsetzen:

$$
\begin{aligned}
f_1 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 &= x_0 \\
f_1 \cdot 0.1 \cdot x_0 + 0.4 \cdot x_0 &= x_0 \\
0.1 \cdot f_1 \cdot x_0 &= 0.6 \cdot x_0 \qquad || : 0.1x_0 \\
f_1 &= 6
\end{aligned}
$$