Aufgabe 1.1

Welche der folgenden Gleichungen mit den Unbekannten x_1, x_2 und x_3 sind linear?

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}\,x_3 = 1$

(b) $x_1 + 3x_2 + x_1x_2 = 2$

(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$

(d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$

Aufgabe 1.2

Bestimme die Lösungsmenge der linearen Gleichung $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$.

Aufgabe 1.3

Stelle die erweiterte Matrix des Gleichungssystems auf.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4

Welches lineare Gleichungssystem entspricht der folgenden erweiterten Matrix?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.5

Gib eine lineare Gleichung mit den Unbekannten x_1, x_2 und x_3 an, das die folgende Lösung hat.

$x_1 = 7 + 5s - 4t$

$x_2 = s$

$x_3 = t$

Aufgabe 1.6

Was ist ein konsistentes lineares Gleichungssystem?

Aufgabe 1.7

Stelle die Lösungsmenge der linearen Gleichung $2x_1 + 3x_2 = 6$ grafisch dar.

Aufgabe 2.1

Welche der folgenden Matrizen sind in Zeilenstufenform?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.2

Welche der folgenden Matrizen sind in reduzierter Zeilenstufenform?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.3

Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssystems mit folgender erweiterter Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.4

Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssystems mit folgender erweiterter Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.5

Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssystems mit folgender erweiterter Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.6

Löse das zur erweiterten Matrix gehörende lineare Gleichungssystem durch Rückwärtseinsetzen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.7

Löse das lineare Gleichungssystem durch Gauss-Jordan-Elimination.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.8

Löse das lineare Gleichungssystem durch Gauss-Jordan-Elimination.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= -1 \\ -x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.9

Löse das lineare Gleichungssystem durch Gauss-Jordan-Elimination.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.10

Hat das homogene lineare Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung?

(a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 & -7 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

(a) Welche Dimension hat die Matrix A?

(b) $a_{2,3} = ?$

(c) $a_{3,2} = ?$

(d) $a_{4,5} = ?$

Aufgabe 3.2

Gegeben: Matrizen A, B, C und D mit

- $\dim(A) = 3 \times 4$
- $\dim(B) = 4 \times 3$
- $\dim(C) = 3 \times 2$
- $\dim(D) = 1 \times 4$

Welche Dimenision hat der Matrixterm, sofern er überhaupt definiert ist.

(a) $A \cdot B$

(b) $B \cdot A$

(c) $A \cdot A^T \cdot C$

(d) $B \cdot C$

(e) $C \cdot D$

(f) $(D^T \cdot D)^{10}$

Aufgabe 3.3

Stelle das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 4x_4 &= 8 \\ -2x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_1 + 9x_2 - 7x_3 &= -1 \end{aligned}$$

kompakter in Matrixform dar und schreibe die Elemente aller beteiligten Matrizen auf.

Aufgabe 3.4

Berechne die Spur der folgenden Matrizen

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}^T$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.5

Berechne mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die folgenden Ausdrücke, sofern diese definiert sind.

(a) $2A + B^\mathsf{T}$

(b) AB

(c) BA

(d) $A^\mathsf{T} B^\mathsf{T}$

(e) $\operatorname{tr}(C)$

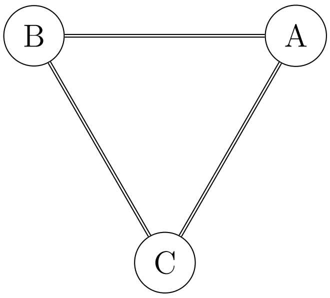
(f) $\operatorname{tr}(BC)$

Aufgabe 3.6

Berechne für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ohne Taschenrechner die Potenz A^{100}.

Aufgabe 4.1

Ein Hamster lagert Vorräte (Körner) in verschiedenen Kammern, die durch Gänge verbunden sind.



Jeden Tag verschiebt der Hamster Teile der Vorräte zwischen den Kammern. Und zwar nach folgendem gleichbleibenden Muster:

- Aus Kammer A werden 50% in Kammer B und 30% in Kammer C verfrachtet.
- Aus Kammer B werden 10% in Kammer A und 40% in Kammer C gebracht.
- Aus Kammer C werden 20% in Kammer A und 20% in Kammer B verfrachtet.

Wie viele Gramm Körner befinden sich nach 50 Tagen in jeder Kammer, wenn wir von der (unrealistischen) Annahme ausgehen, dass der Hamster keine der transportierten Körner isst und dass sich anfänglich in jeder Kammer 200 Gramm Körner befinden.

Aufgabe 4.2

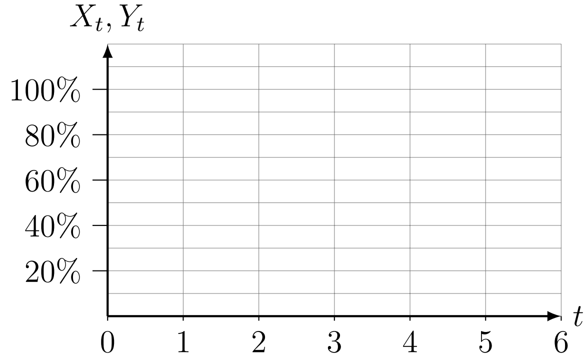
Bei einer (gedachten) chemischen Reaktion zwischen Molekülen X und Molekülen Y reagieren pro Zeiteinheit

- 20% der Moleküle X zu Molekülen Y,
- 30% der Moleküle Y zu Molekülen X

Die Anfangskonzentrationen betragen $X_0 = 100\%$ und $Y_0 = 0\%$.

(a) Beschreibe diese chemische Reaktion quantitativ in Form eines Gleichungssytems und gib die zugehörige Übergangsmatrix an.

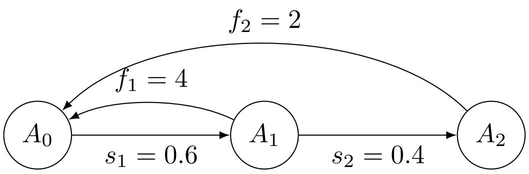
(b) Stelle die Konzentrationen nach 1, 2, 3, 4 und 5 Zeiteinheiten im folgenden Koordinatensystem dar.



(b) Gegen welches dynamische Gleichgewicht strebt das System für $t \to \infty$?

Aufgabe 4.3

Eine Population entwickelt sich in mehreren Altersstufen A_0, A_1, $\ldots A_n$, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Individuum die nächste Altersstufe i erreicht mit s_i (*survival rate*) bezeichnet wird ($1 \leq i \leq n$). Darüber hinaus bringt jede Altersgruppe A_i ($i > 0$) einen Anteil neuer Individuen hervor, der mit f_i (*fertility rate*) bezeichnet wird. (Populationsmodell von Lewis und Leslie)



(a) Stelle die Übergansmatrix für die Populationsentwicklung dar.

(b) Wie entwickelt sich eine Anfangsverteilung $(x_0, x_1, x_2)^T$ auf lange Sicht?

(c) Wie gross müsste die Fertitlitätsrate f_1 sein, damit die Populationsentwicklung langfristig stabil bleibt?