

# Komplexe Zahlen

## Die Menge der natürlichen Zahlen

Der „natürliche Zählprozess“ führt zu Mengen der folgenden Form:

## Die Menge der natürlichen Zahlen

Der „natürliche Zählprozess“ führt zu Mengen der folgenden Form:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

## Die Menge der natürlichen Zahlen

Der „natürliche Zählprozess“ führt zu Mengen der folgenden Form:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

oder

## Die Menge der natürlichen Zahlen

Der „natürliche Zählprozess“ führt zu Mengen der folgenden Form:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

oder

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

## Die Menge der natürlichen Zahlen

Der „natürliche Zählprozess“ führt zu Mengen der folgenden Form:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

oder

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

## Die Menge der natürlichen Zahlen

Der „natürliche Zählprozess“ führt zu Mengen der folgenden Form:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

oder

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

In  $\mathbb{N}$  können wir beispielsweise Gleichungen der Art

$$x - 7 = 0$$

lösen.

## Die Menge der ganzen Zahlen

Bildet man zu jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ihre Gegenzahl  $-n$ , und vereinigt die so entstandene Menge mit  $\mathbb{N}$ , so erhält man die *Menge der ganzen Zahlen*:



## Die Menge der ganzen Zahlen

Bildet man zu jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ihre Gegenzahl  $-n$ , und vereinigt die so entstandene Menge mit  $\mathbb{N}$ , so erhält man die *Menge der ganzen Zahlen*:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

## Die Menge der ganzen Zahlen

Bildet man zu jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ihre Gegenzahl  $-n$ , und vereinigt die so entstandene Menge mit  $\mathbb{N}$ , so erhält man die *Menge der ganzen Zahlen*:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

In  $\mathbb{Z}$  können wir beispielsweise Gleichungen vom Typ

$$x - 7 = 0 \quad \text{oder} \quad x + 7 = 0$$

lösen.

## Die Menge der rationalen Zahlen

Die Menge aller Brüche  $p/q$  mit aus einem Zähler  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ , nennt man die Menge der *rationalen Zahlen*:

## Die Menge der rationalen Zahlen

Die Menge aller Brüche  $p/q$  mit aus einem Zähler  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ , nennt man die Menge der *rationalen Zahlen*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \right\}$$

## Die Menge der rationalen Zahlen

Die Menge aller Brüche  $p/q$  mit aus einem Zähler  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ , nennt man die Menge der *rationalen Zahlen*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \right\}$$

Die schriftliche Division zweier ganzer Zahlen lehrt uns, dass das Resultat entweder eine endliche ( $5/4 = 1.25$ ) oder eine nicht endliche aber periodische Darstellung ( $2/3 = 0.666\dots$ ) besitzt.

## Die Menge der rationalen Zahlen

Die Menge aller Brüche  $p/q$  mit aus einem Zähler  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ , nennt man die Menge der *rationalen Zahlen*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \right\}$$

Die schriftliche Division zweier ganzer Zahlen lehrt uns, dass das Resultat entweder eine endliche ( $5/4 = 1.25$ ) oder eine nicht endliche aber periodische Darstellung ( $2/3 = 0.666\dots$ ) besitzt.

In  $\mathbb{Q}$  können wir beispielsweise Gleichungen der Form

$$5x - 7 = 0 \quad \text{oder} \quad 5x + 7 = 0$$

lösen.

## Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Untersuchen wir die Grenzwerte von Folgen in  $\mathbb{Q}$ , so erhalten wir einen neuen Typ von Zahlen.

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$



## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) =$$

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) =$$

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{7}{4} =$$

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{3}{x_3} \right) =$$

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{3}{x_3} \right) = \frac{97}{56} =$$

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{3}{x_3} \right) = \frac{97}{56} = 1.73214 \dots$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \left( x_4 + \frac{3}{x_4} \right) =$$

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{3}{x_3} \right) = \frac{97}{56} = 1.73214 \dots$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \left( x_4 + \frac{3}{x_4} \right) = \frac{18817}{10864} =$$



## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{3}{x_3} \right) = \frac{97}{56} = 1.73214 \dots$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \left( x_4 + \frac{3}{x_4} \right) = \frac{18817}{10864} = 1.73205 \dots$$

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{3}{x_3} \right) = \frac{97}{56} = 1.73214 \dots$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \left( x_4 + \frac{3}{x_4} \right) = \frac{18817}{10864} = 1.73205 \dots$$

$$\dots \lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$$

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{3}{x_3} \right) = \frac{97}{56} = 1.73214 \dots$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \left( x_4 + \frac{3}{x_4} \right) = \frac{18817}{10864} = 1.73205 \dots$$

$$\dots \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.73205 \dots =$$

## Beispiel 1.1

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{3}{x_3} \right) = \frac{97}{56} = 1.73214 \dots$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \left( x_4 + \frac{3}{x_4} \right) = \frac{18817}{10864} = 1.73205 \dots$$

$$\dots \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.73205 \dots = \sqrt{3}$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} =$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} =$$



## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} =$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{4!} =$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} =$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} = 2.708\bar{3}$$

$$x_5 = x_4 + \frac{1}{5!} =$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} = 2.708\bar{3}$$

$$x_5 = x_4 + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} =$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} = 2.708\bar{3}$$

$$x_5 = x_4 + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} = 2.71\bar{6}$$

## Beispiel 1.2

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} = 2.708\bar{3}$$

$$x_5 = x_4 + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} = 2.71\bar{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e \approx 2.7181828\dots$$



## Die Menge der reellen Zahlen

Die neuen Zahlen, die wir durch den oben beschriebenen Prozess erhalten, werden *irrationale Zahlen* genannt. Fügen wir sie zu den rationalen Zahlen hinzu, sprechen wir von den *reellen Zahlen*. Für sie gibt es eine einfache Beschreibung:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist eine abbrechende oder nichtabbrechende Dezimalzahl}\}$$

## Die Menge der reellen Zahlen

Die neuen Zahlen, die wir durch den oben beschriebenen Prozess erhalten, werden *irrationale Zahlen* genannt. Fügen wir sie zu den rationalen Zahlen hinzu, sprechen wir von den *reellen Zahlen*. Für sie gibt es eine einfache Beschreibung:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist eine abbrechende oder nichtabbrechende Dezimalzahl}\}$$

In  $\mathbb{R}$  können wir beispielsweise Gleichungen der Form

$$x^2 - 2 = 0$$

lösen.

## Die imaginäre Einheit

Eine Art von Gleichung können wir jedoch mit den bisher bekannten Zahlen nicht lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

## Die imaginäre Einheit

Eine Art von Gleichung können wir jedoch mit den bisher bekannten Zahlen nicht lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

*Trick:* Wir geben der Zahl, die die Gleichung oben löst, einen Namen.

## Die imaginäre Einheit

Eine Art von Gleichung können wir jedoch mit den bisher bekannten Zahlen nicht lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

*Trick:* Wir geben der Zahl, die die Gleichung oben löst, einen Namen.

$i$  ist die Zahl, deren Quadrat  $-1$  ergibt.

## Die imaginäre Einheit

Eine Art von Gleichung können wir jedoch mit den bisher bekannten Zahlen nicht lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

*Trick:* Wir geben der Zahl, die die Gleichung oben löst, einen Namen.

$i$  ist die Zahl, deren Quadrat  $-1$  ergibt.

$i$  wird *imaginäre Einheit* genannt.

Damit können wir die Gleichung lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

Damit können wir die Gleichung lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$



Damit können wir die Gleichung lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x^2 = i^2$$

Damit können wir die Gleichung lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x^2 = i^2$$

$$x_1 = i$$

Damit können wir die Gleichung lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x^2 = i^2$$

$$x_1 = i$$

$$x_2 = -i$$

## imaginäre Zahlen

Reelle Vielfache von  $i$  werden *imaginäre Zahlen* genannt.

Beispiele für imaginäre Zahlen:

▶  $5i$

▶  $-\sqrt{2}i$

# Komplexe Zahlen

Addiert man zu einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  die imaginäre Zahl  $bi$ , so entsteht eine *komplexe Zahl*  $z$ :

$$z = a + bi$$

$a$  heisst *Realteil* und  $b$  *Imaginärteil* von  $z$ .

# Komplexe Zahlen

Addiert man zu einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  die imaginäre Zahl  $bi$ , so entsteht eine *komplexe Zahl*  $z$ :

$$z = a + bi$$

$a$  heisst *Realteil* und  $b$  *Imaginärteil* von  $z$ .

*Achtung*:  $a$  und  $b$  sind beide *reell*!

# Komplexe Zahlen

Addiert man zu einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  die imaginäre Zahl  $bi$ , so entsteht eine *komplexe Zahl*  $z$ :

$$z = a + bi$$

$a$  heisst *Realteil* und  $b$  *Imaginärteil* von  $z$ .

*Achtung*:  $a$  und  $b$  sind beide *reell*!

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R}\}$$

## Beispiel 1.4

	$z$	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3i$		
(b)	$7 - \frac{3}{4}i$		
(c)	$-\pi$		
(d)	$5.2i$		



## Beispiel 1.4

	$z$	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3i$	5	
(b)	$7 - \frac{3}{4}i$		
(c)	$-\pi$		
(d)	$5.2i$		

## Beispiel 1.4

	$z$	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3i$	5	3
(b)	$7 - \frac{3}{4}i$		
(c)	$-\pi$		
(d)	$5.2i$		

## Beispiel 1.4

	$z$	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3i$	5	3
(b)	$7 - \frac{3}{4}i$	7	
(c)	$-\pi$		
(d)	$5.2i$		

## Beispiel 1.4

	$z$	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3i$	5	3
(b)	$7 - \frac{3}{4}i$	7	$-\frac{3}{4}$
(c)	$-\pi$		
(d)	$5.2i$		

## Beispiel 1.4

	$z$	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3i$	5	3
(b)	$7 - \frac{3}{4}i$	7	$-\frac{3}{4}$
(c)	$-\pi$	$-\pi$	
(d)	$5.2i$		

## Beispiel 1.4

	$z$	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3i$	5	3
(b)	$7 - \frac{3}{4}i$	7	$-\frac{3}{4}$
(c)	$-\pi$	$-\pi$	0
(d)	$5.2i$		

## Beispiel 1.4

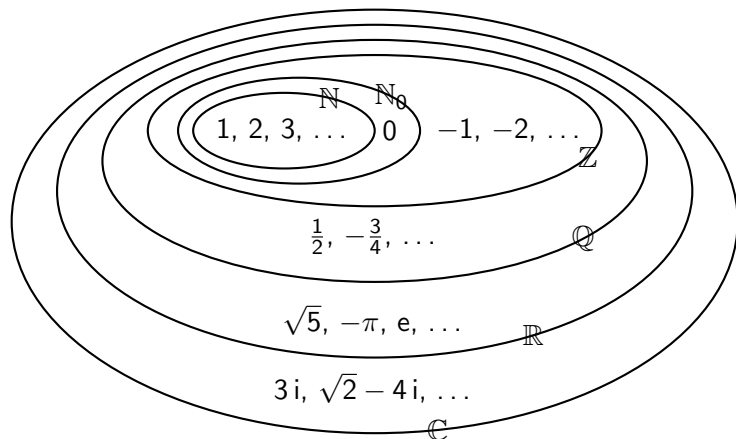
	$z$	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3i$	5	3
(b)	$7 - \frac{3}{4}i$	7	$-\frac{3}{4}$
(c)	$-\pi$	$-\pi$	0
(d)	$5.2i$	0	

## Beispiel 1.4

	$z$	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3i$	5	3
(b)	$7 - \frac{3}{4}i$	7	$-\frac{3}{4}$
(c)	$-\pi$	$-\pi$	0
(d)	$5.2i$	0	5.2



# Das Gesamtbild



# Allgemeines

Grundsätzlich gilt beim Rechnen mit komplexen Zahlen:

- ▶ Behandle die imaginären Einheit  $i$  wie eine „normale“ Variable.
- ▶ Ersetze  $i^2$  durch  $-1$ .

# Addition

$$(5 + 3i) + (7 - 4i) =$$

# Addition

$$(5 + 3i) + (7 - 4i) = 5 + 7 + 3i - 4i =$$

# Addition

$$(5 + 3i) + (7 - 4i) = 5 + 7 + 3i - 4i = 12 - i$$

# Subtraktion

$$(9 - i) - (6 + 2i) =$$

# Subtraktion

$$(9 - i) - (6 + 2i) = 9 - 6 - i - 2i =$$

# Subtraktion

$$(9 - i) - (6 + 2i) = 9 - 6 - i - 2i = 3 - 3i$$



# Multiplikation

$$(5 - 2i)(2 + 3i) =$$

# Multiplikation

$$(5 - 2i)(2 + 3i) = 10 + 15i - 4i - 6i^2$$

## Multiplikation

$$\begin{aligned}(5 - 2i)(2 + 3i) &= 10 + 15i - 4i - 6i^2 \\ &= 10 + 11i - 6 \cdot (-1)\end{aligned}$$

## Multiplikation

$$\begin{aligned}(5 - 2i)(2 + 3i) &= 10 + 15i - 4i - 6i^2 \\ &= 10 + 11i - 6 \cdot (-1) \\ &= 16 + 11i\end{aligned}$$

# Division

$$\frac{16 + 11i}{2 + 3i} =$$

## Division

$$\frac{16 + 11i}{2 + 3i} = \frac{(16 + 11i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)}$$

=

## Division

$$\begin{aligned}\frac{16 + 11i}{2 + 3i} &= \frac{(16 + 11i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} \\ &= \frac{32 - 48i + 22i - 33i^2}{4 - 9i^2} \\ &= \end{aligned}$$

## Division

$$\begin{aligned}\frac{16 + 11i}{2 + 3i} &= \frac{(16 + 11i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} \\ &= \frac{32 - 48i + 22i - 33i^2}{4 - 9i^2} \\ &= \frac{32 - 26i + 33}{4 + 9} =\end{aligned}$$



## Division

$$\begin{aligned}\frac{16 + 11i}{2 + 3i} &= \frac{(16 + 11i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} \\ &= \frac{32 - 48i + 22i - 33i^2}{4 - 9i^2} \\ &= \frac{32 - 26i + 33}{4 + 9} = \frac{65 - 26i}{13} =\end{aligned}$$

## Division

$$\begin{aligned}\frac{16 + 11i}{2 + 3i} &= \frac{(16 + 11i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} \\ &= \frac{32 - 48i + 22i - 33i^2}{4 - 9i^2} \\ &= \frac{32 - 26i + 33}{4 + 9} = \frac{65 - 26i}{13} = 5 - 2i\end{aligned}$$

## Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition  $i = \sqrt{-1}$  anstelle von  $i^2 = -1$ . Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

## Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition  $i = \sqrt{-1}$  anstelle von  $i^2 = -1$ . Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

$$-1 =$$

## Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition  $i = \sqrt{-1}$  anstelle von  $i^2 = -1$ . Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

$$-1 = i \cdot i =$$

## Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition  $i = \sqrt{-1}$  anstelle von  $i^2 = -1$ . Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} =$$

## Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition  $i = \sqrt{-1}$  anstelle von  $i^2 = -1$ . Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} =$$

## Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition  $i = \sqrt{-1}$  anstelle von  $i^2 = -1$ . Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} =$$



## Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition  $i = \sqrt{-1}$  anstelle von  $i^2 = -1$ . Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

## Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition  $i = \sqrt{-1}$  anstelle von  $i^2 = -1$ . Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Damit haben wir  $-1 = 1$  bewiesen!

## Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition  $i = \sqrt{-1}$  anstelle von  $i^2 = -1$ . Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Damit haben wir  $-1 = 1$  bewiesen!

Um das zu vermeiden, merkt man sich:

## Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition  $i = \sqrt{-1}$  anstelle von  $i^2 = -1$ . Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Damit haben wir  $-1 = 1$  bewiesen!

Um das zu vermeiden, merkt man sich:

$i$  ist diejenige Zahl, deren Quadrat  $-1$  ergibt.

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

Diskriminante:  $D =$

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac =$$



## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 =$$

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0$$

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0$$

keine *reelle* Lösung

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0$$

keine *reelle* Lösung

$$x_{1,2} =$$

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0$$

keine *reelle* Lösung

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} =$$

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0$$

keine *reelle* Lösung

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} =$$

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0$$

keine *reelle* Lösung

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{i^2 \cdot 16}}{2} \\ &= \end{aligned}$$

## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0$$

keine *reelle* Lösung

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{i^2 \cdot 16}}{2} \\ &= \frac{6 \pm 4i}{2} = \end{aligned}$$



## Anwendung

Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

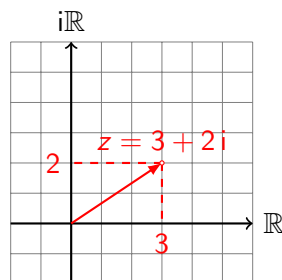
$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \text{Koeffizienten: } a = 1, b = -6, c = 13$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0$$

keine *reelle* Lösung

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{i^2 \cdot 16}}{2} \\ &= \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i \end{aligned}$$

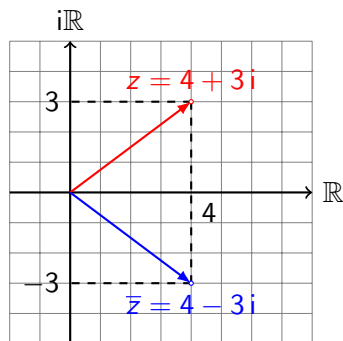
Auf C. F. Gauss (1777–1855) geht die Darstellung einer komplexen Zahl  $z = a + bi$  als Punkt  $(a, b)$  in der *komplexen Zahlenebene* (oder *Gauss'schen Zahlenebene*) zurück.



Ist  $z = a + bi$  eine komplexe Zahl, so ist die *konjugiert komplexe Zahl*  $\bar{z}$  definiert durch:

$$\bar{z} = a - bi$$

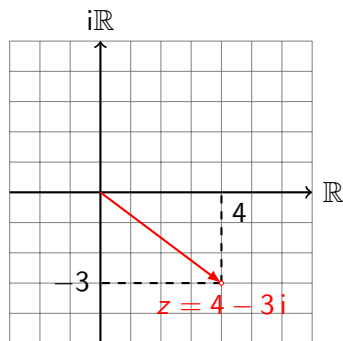
In der Gaußschen Zahlenebene entsteht  $\bar{z}$  durch Spiegelung von  $z$  an der reellen Achse.



Der Betrag  $|z|$  einer komplexen Zahl  $z$  ist definiert durch:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

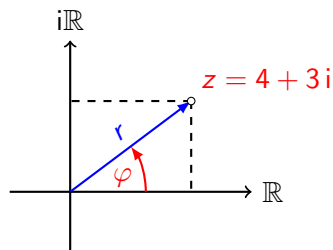
In der Gaußschen Zahlenebene entspricht der Betrag  $|z|$  dem Abstand des Punkts  $z$  vom Ursprung.



$$|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

*Bemerkung:* Komplexe Zahlen lassen sich nicht wie reelle Zahlen der Größe nach ordnen. Oder welche der Zahlen  $5 + 3i$  bzw.  $2 + 6i$  soll die grössere sein?

Anstelle zweier kartesischer Koordinaten können sogenannte **Polarkoordinaten** treten.



Durch Angabe von

- ▶  $r = |z|$  (Abstand zum Ursprung)
- ▶  $\varphi = \arg(z)$  (Winkel zur positiven reellen Achse)

ist ein Punkt ebenfalls eindeutig bestimmt.

Die beiden zugehörigen Abbildungen lauten:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad | \cdot | : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ z &\mapsto |z| \end{aligned}$$

Die beiden zugehörigen Abbildungen lauten:

▶  $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$$z \mapsto |z|$$

▶  $\arg: \mathbb{C} \rightarrow [0^\circ, 360^\circ)$

$$z \mapsto \arg(z)$$

bzw.

$$\arg: \mathbb{C} \rightarrow [0, 2\pi)$$

$$z \mapsto \arg(z)$$



Die beiden zugehörigen Abbildungen lauten:

▶  $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$$z \mapsto |z|$$

▶  $\arg: \mathbb{C} \rightarrow [0^\circ, 360^\circ)$

$$z \mapsto \arg(z)$$

bzw.

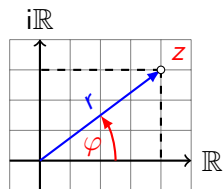
$$\arg: \mathbb{C} \rightarrow [0, 2\pi)$$

$$z \mapsto \arg(z)$$

**Beachte:**  $\arg(0^\circ)$  ist nicht definiert, da dem Ursprung jeder beliebige Winkel zugeordnet werden kann.

## Beispiel 2.1

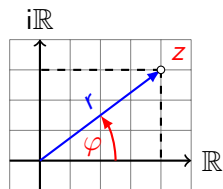
$$z = 4 + 3i$$



$$r = |z| =$$

## Beispiel 2.1

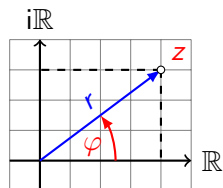
$$z = 4 + 3i$$



$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} =$$

## Beispiel 2.1

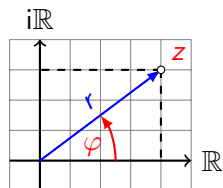
$$z = 4 + 3i$$



$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} =$$

## Beispiel 2.1

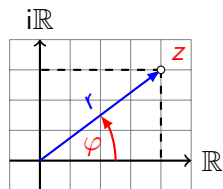
$$z = 4 + 3i$$



$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

## Beispiel 2.1

$$z = 4 + 3i$$

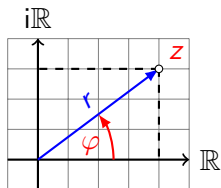


$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi = \arg(z) =$$

## Beispiel 2.1

$$z = 4 + 3i$$

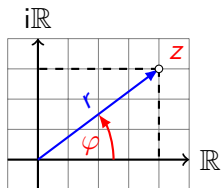


$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{3}{4} \approx$$

## Beispiel 2.1

$$z = 4 + 3i$$



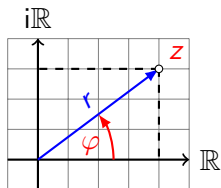
$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{3}{4} \approx 36.37^\circ$$



## Beispiel 2.1

$$z = 4 + 3i$$



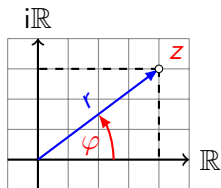
$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{3}{4} \approx 36.37^\circ$$

Polarkoordinaten von  $z$ :

## Beispiel 2.1

$$z = 4 + 3i$$



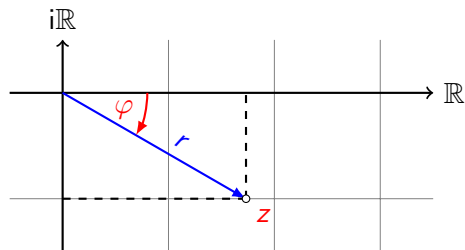
$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{3}{4} \approx 36.37^\circ$$

Polarkoordinaten von  $z$ :  $(5, 36.37^\circ)$

## Beispiel 2.2

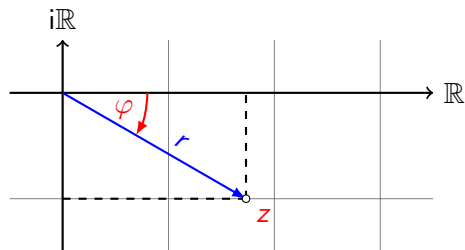
$$z = \sqrt{3} - i$$



$$r = |z| =$$

## Beispiel 2.2

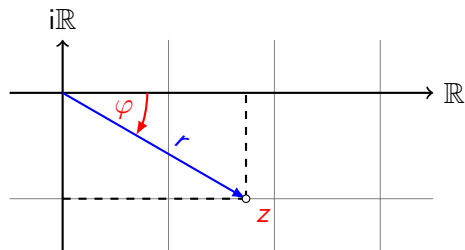
$$z = \sqrt{3} - i$$



$$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} =$$

## Beispiel 2.2

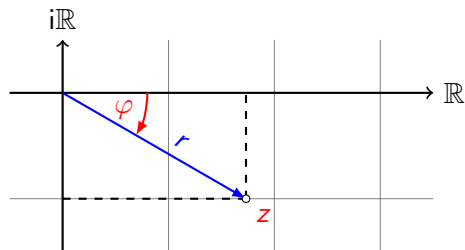
$$z = \sqrt{3} - i$$



$$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} =$$

## Beispiel 2.2

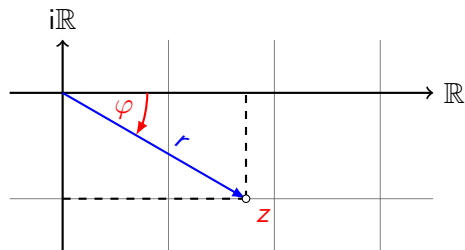
$$z = \sqrt{3} - i$$



$$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} =$$

## Beispiel 2.2

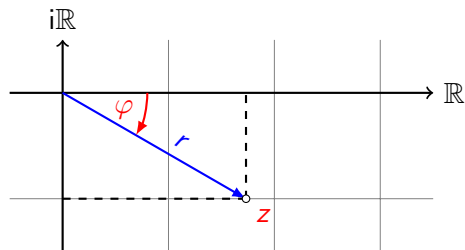
$$z = \sqrt{3} - i$$



$$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

## Beispiel 2.2

$$z = \sqrt{3} - i$$



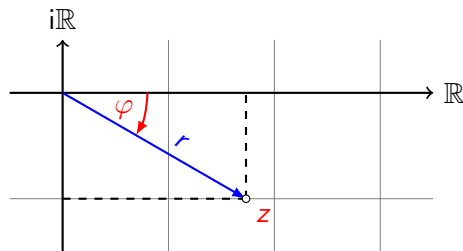
$$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi = \arg(z) =$$



## Beispiel 2.2

$$z = \sqrt{3} - i$$

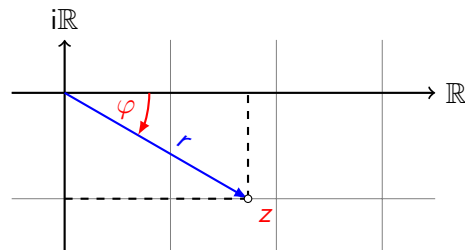


$$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} =$$

## Beispiel 2.2

$$z = \sqrt{3} - i$$

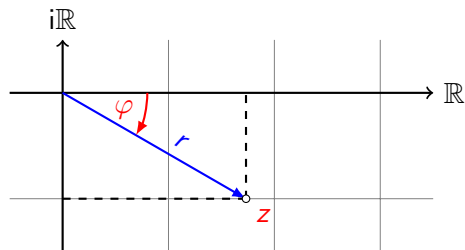


$$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} = -30^\circ =$$

## Beispiel 2.2

$$z = \sqrt{3} - i$$

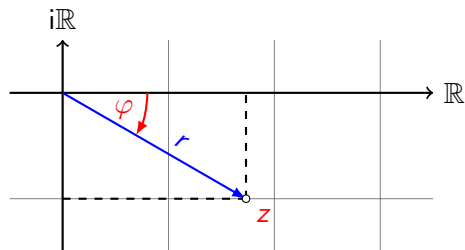


$$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} = -30^\circ = 330^\circ$$

## Beispiel 2.2

$$z = \sqrt{3} - i$$



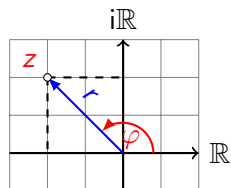
$$r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} = -30^\circ = 330^\circ$$

Polarkoordinaten von  $z$ :  $(2, 330^\circ)$

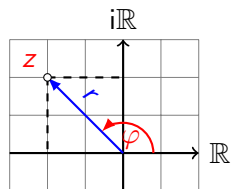
## Beispiel 2.3

$$z = -2 + 2i$$



## Beispiel 2.3

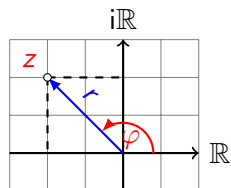
$$z = -2 + 2i$$



$$r = |z| =$$

## Beispiel 2.3

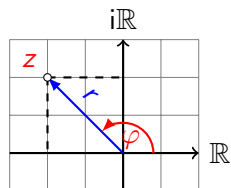
$$z = -2 + 2i$$



$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} =$$

## Beispiel 2.3

$$z = -2 + 2i$$

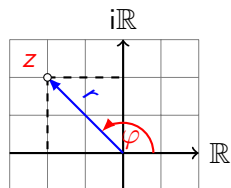


$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} =$$



## Beispiel 2.3

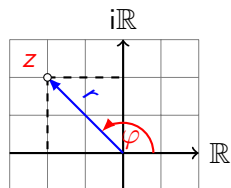
$$z = -2 + 2i$$



$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} =$$

## Beispiel 2.3

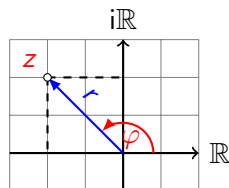
$$z = -2 + 2i$$



$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

## Beispiel 2.3

$$z = -2 + 2i$$

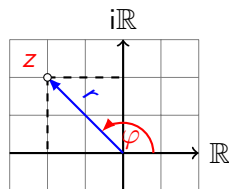


$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\varphi = \arg(z) =$$

## Beispiel 2.3

$$z = -2 + 2i$$

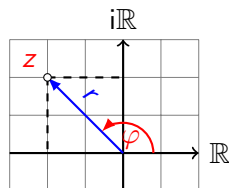


$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{2}{-2} =$$

## Beispiel 2.3

$$z = -2 + 2i$$

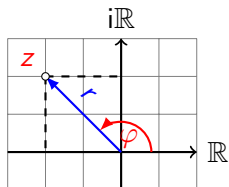


$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{2}{-2} = \arctan -1 =$$

## Beispiel 2.3

$$z = -2 + 2i$$

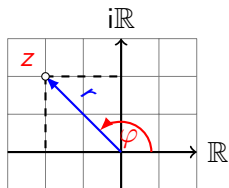


$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{2}{-2} = \arctan -1 = -45^\circ$$

## Beispiel 2.3

$$z = -2 + 2i$$

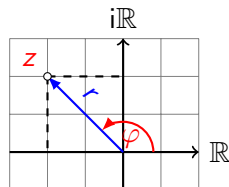


$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{2}{-2} = \arctan -1 = -45^\circ (?)$$

## Beispiel 2.3

$$z = -2 + 2i$$



$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

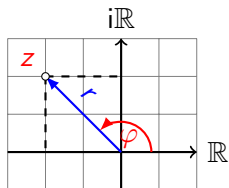
$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{2}{-2} = \arctan -1 = -45^\circ (?)$$

$$\text{Für } \operatorname{Re}(z) < 0 \text{ ist } \arg z = \arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} + 180^\circ$$



## Beispiel 2.3

$$z = -2 + 2i$$



$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{2}{-2} = \arctan -1 = -45^\circ (?)$$

$$\text{Für } \operatorname{Re}(z) < 0 \text{ ist } \arg z = \arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} + 180^\circ$$

Polarkoordinaten von  $z$ :  $(2\sqrt{2}, 135^\circ)$

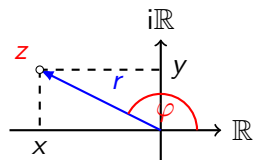
kartesische Koordinaten  $\rightarrow$  PolarkoordinatenGegeben:  $z = x + iy$     Gesucht:  $z = (r, \varphi)$ 

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 180^\circ & \text{für } x < 0 \\ 90^\circ & \text{für } x = 0, y > 0 \\ 270^\circ & \text{für } x = 0, y < 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

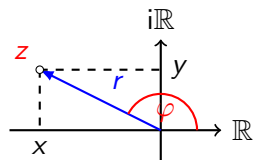
## Beispiel 2.4

$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$



## Beispiel 2.4

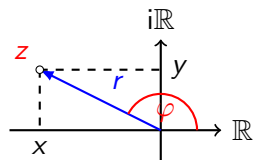
$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$



$$\frac{x}{r} =$$

## Beispiel 2.4

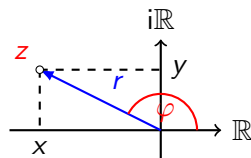
$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$



$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x =$$

## Beispiel 2.4

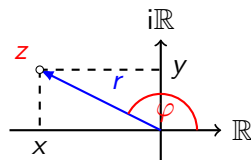
$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$



$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos \varphi =$$

## Beispiel 2.4

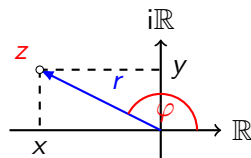
$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$



$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 150^\circ \approx$$

## Beispiel 2.4

$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$

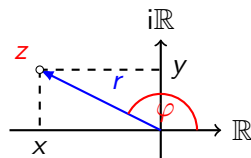


$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 150^\circ \approx -3.46$$



## Beispiel 2.4

$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$

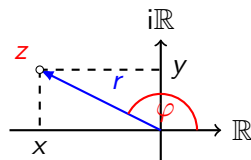


$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 150^\circ \approx -3.46$$

$$\frac{y}{r} =$$

## Beispiel 2.4

$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$

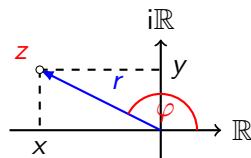


$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 150^\circ \approx -3.46$$

$$\frac{y}{r} = \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad y =$$

## Beispiel 2.4

$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$

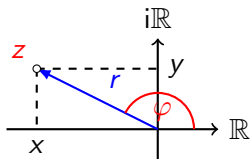


$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 150^\circ \approx -3.46$$

$$\frac{y}{r} = \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad y = r \cdot \sin \varphi =$$

## Beispiel 2.4

$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$

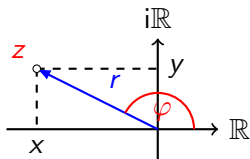


$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 150^\circ \approx -3.46$$

$$\frac{y}{r} = \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad y = r \cdot \sin \varphi = 4 \cdot \sin 150^\circ =$$

## Beispiel 2.4

$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$

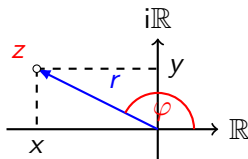


$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 150^\circ \approx -3.46$$

$$\frac{y}{r} = \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad y = r \cdot \sin \varphi = 4 \cdot \sin 150^\circ = 2$$

## Beispiel 2.4

$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$



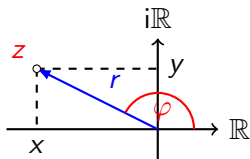
$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 150^\circ \approx -3.46$$

$$\frac{y}{r} = \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad y = r \cdot \sin \varphi = 4 \cdot \sin 150^\circ = 2$$

$$z = -3.46 + 2i$$

## Beispiel 2.4

$$z = (4, 150^\circ) \stackrel{?}{=} x + iy$$



$$\frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad x = r \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 150^\circ \approx -3.46$$

$$\frac{y}{r} = \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad y = r \cdot \sin \varphi = 4 \cdot \sin 150^\circ = 2$$

$$z = -3.46 + 2i$$

**Bemerkung:** Hier sind keine Fallunterscheidungen nötig.

## Polarkoordinaten $\rightarrow$ kartesische Koordinaten

Gegeben:  $z = (r, \varphi)$     Gesucht:  $z = x + iy$



## Polarkoordinaten $\rightarrow$ kartesische Koordinaten

Gegeben:  $z = (r, \varphi)$     Gesucht:  $z = x + iy$

►  $x = r \cdot \cos \varphi$

## Polarkoordinaten $\rightarrow$ kartesische Koordinaten

Gegeben:  $z = (r, \varphi)$     Gesucht:  $z = x + iy$

▶  $x = r \cdot \cos \varphi$

▶  $y = r \cdot \sin \varphi$

## cis-Form

Aus der letzten Umrechnungsformel folgt:

## cis-Form

Aus der letzten Umrechnungsformel folgt:

$$z =$$

## cis-Form

Aus der letzten Umrechnungsformel folgt:

$$z = x + iy =$$

## cis-Form

Aus der letzten Umrechnungsformel folgt:

$$z = x + iy = r \cdot \cos \varphi + i r \cdot \sin \varphi =$$

## cis-Form

Aus der letzten Umrechnungsformel folgt:

$$z = x + iy = r \cdot \cos \varphi + i r \cdot \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

## cis-Form

Aus der letzten Umrechnungsformel folgt:

$$z = x + iy = r \cdot \cos \varphi + i r \cdot \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

**Definition:**



## cis-Form

Aus der letzten Umrechnungsformel folgt:

$$z = x + iy = r \cdot \cos \varphi + i r \cdot \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

**Definition:**  $\text{cis } \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$

## cis-Form

Aus der letzten Umrechnungsformel folgt:

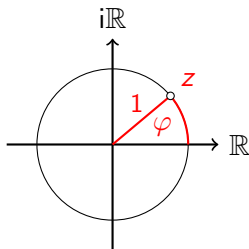
$$z = x + iy = r \cdot \cos \varphi + i r \cdot \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

**Definition:**  $\text{cis } \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Also:  $z = r \text{cis } \varphi$

## Bemerkung

Die cis-Funktion ordnet jedem Winkel  $\varphi$  den Punkt  $z = \text{cis}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  auf dem Einheitskreis zu.



$$\text{cis}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \mapsto \text{cis}(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Schränkt man den Definitionsbereich auf  $[0, 2\pi)$  bzw. auf  $[0, 360^\circ)$  ein, so ist die cis-Funktion *bijektiv* (*umkehrbar eindeutig*).

## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ =$

## Beispiel 2.5

$$(a) \operatorname{cis} 0^\circ = 1$$

## Beispiel 2.5

$$(a) \operatorname{cis} 0^\circ = 1 \quad (\rightarrow \text{Einheitskreis})$$

## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ = 1$  ( $\rightarrow$  Einheitskreis)

(b)  $\text{cis } 90^\circ =$

## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ = 1$  ( $\rightarrow$  Einheitskreis)

(b)  $\text{cis } 90^\circ = i$



## Beispiel 2.5

(a)  $\operatorname{cis} 0^\circ = 1$  (→ Einheitskreis)

(b)  $\operatorname{cis} 90^\circ = i$  (→ Einheitskreis)

## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ = 1$  (→ Einheitskreis)

(b)  $\text{cis } 90^\circ = i$  (→ Einheitskreis)

(c)  $\text{cis } 180^\circ =$

## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ = 1$  (→ Einheitskreis)

(b)  $\text{cis } 90^\circ = i$  (→ Einheitskreis)

(c)  $\text{cis } 180^\circ = -1$

## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ = 1$  (→ Einheitskreis)

(b)  $\text{cis } 90^\circ = i$  (→ Einheitskreis)

(c)  $\text{cis } 180^\circ = -1$  (→ Einheitskreis)

## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ = 1$  (→ Einheitskreis)

(b)  $\text{cis } 90^\circ = i$  (→ Einheitskreis)

(c)  $\text{cis } 180^\circ = -1$  (→ Einheitskreis)

(d)  $\text{cis } 270^\circ =$

## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ = 1$  (→ Einheitskreis)

(b)  $\text{cis } 90^\circ = i$  (→ Einheitskreis)

(c)  $\text{cis } 180^\circ = -1$  (→ Einheitskreis)

(d)  $\text{cis } 270^\circ = -i$

## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ = 1$  (→ Einheitskreis)

(b)  $\text{cis } 90^\circ = i$  (→ Einheitskreis)

(c)  $\text{cis } 180^\circ = -1$  (→ Einheitskreis)

(d)  $\text{cis } 270^\circ = -i$  (→ Einheitskreis)

## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ = 1$  (→ Einheitskreis)

(b)  $\text{cis } 90^\circ = i$  (→ Einheitskreis)

(c)  $\text{cis } 180^\circ = -1$  (→ Einheitskreis)

(d)  $\text{cis } 270^\circ = -i$  (→ Einheitskreis)

(e)  $\text{cis } 45^\circ =$



## Beispiel 2.5

(a)  $\text{cis } 0^\circ = 1$  (→ Einheitskreis)

(b)  $\text{cis } 90^\circ = i$  (→ Einheitskreis)

(c)  $\text{cis } 180^\circ = -1$  (→ Einheitskreis)

(d)  $\text{cis } 270^\circ = -i$  (→ Einheitskreis)

(e)  $\text{cis } 45^\circ = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1$  und  $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$$

Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1$  und  $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot \text{cis } \varphi_2$$

Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1$  und  $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot \text{cis } \varphi_2 \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1$  und  $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot \text{cis } \varphi_2 \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1$  und  $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot \text{cis } \varphi_2 \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \\ &\quad + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)\end{aligned}$$

Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1$  und  $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot \text{cis } \varphi_2 \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \\ &\quad + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1$  und  $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot \text{cis } \varphi_2 \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \\ &\quad + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \\ &\quad + i(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)] \end{aligned}$$



Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1$  und  $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot \text{cis } \varphi_2 \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \\ &\quad + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \\ &\quad + i(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)] \end{aligned}$$

Additionstheoreme, FTB S. 99 ...

Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1$  und  $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot \text{cis } \varphi_2 \\&= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\&= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \\&\quad + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \\&= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \\&\quad + i(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)]\end{aligned}$$

Additionstheoreme, FTB S. 99 ...

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1$  und  $z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis } \varphi_1 \cdot \text{cis } \varphi_2 \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \\ &\quad + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \\ &\quad + i(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)] \end{aligned}$$

Additionstheoreme, FTB S. 99 ...

$$\begin{aligned} &= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis}(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

## Produktregel

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Zwei komplexe Zahlen in Polarform werden multipliziert, indem man ihre Radien multipliziert und ihre Winkel addiert.

Die Multiplikation mit komplexen Zahlen entspricht geometrisch einer **Drehstreckung**.

## Beispiel 2.6

►  $z_1 = 1 + i \Leftrightarrow$

## Beispiel 2.6

$$\blacktriangleright z_1 = 1 + i \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}(45^\circ)$$

## Beispiel 2.6

$$\blacktriangleright z_1 = 1 + i \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}(45^\circ)$$

$$\blacktriangleright z_2 = -2 + 2i \quad \Leftrightarrow$$

## Beispiel 2.6

$$\blacktriangleright z_1 = 1 + i \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}(45^\circ)$$

$$\blacktriangleright z_2 = -2 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = \sqrt{8} \cdot \text{cis}(135^\circ)$$



## Beispiel 2.6

$$\blacktriangleright z_1 = 1 + i \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}(45^\circ)$$

$$\blacktriangleright z_2 = -2 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = \sqrt{8} \cdot \text{cis}(135^\circ)$$

$$\blacktriangleright z_3 = z_1 \cdot z_2 = -4$$

## Beispiel 2.6

$$\blacktriangleright z_1 = 1 + i \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}(45^\circ)$$

$$\blacktriangleright z_2 = -2 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = \sqrt{8} \cdot \text{cis}(135^\circ)$$

$$\blacktriangleright z_3 = z_1 \cdot z_2 = -4 \quad \Leftrightarrow$$

## Beispiel 2.6

$$\blacktriangleright z_1 = 1 + i \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}(45^\circ)$$

$$\blacktriangleright z_2 = -2 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = \sqrt{8} \cdot \text{cis}(135^\circ)$$

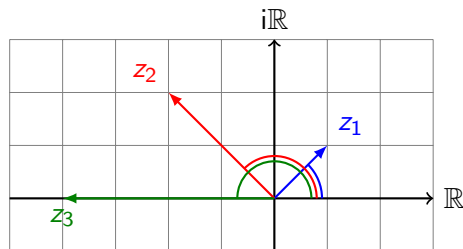
$$\blacktriangleright z_3 = z_1 \cdot z_2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad z_3 = z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot \text{cis}(180^\circ)$$

## Beispiel 2.6

▶  $z_1 = 1 + i \Leftrightarrow z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}(45^\circ)$

▶  $z_2 = -2 + 2i \Leftrightarrow z_2 = \sqrt{8} \cdot \text{cis}(135^\circ)$

▶  $z_3 = z_1 \cdot z_2 = -4 \Leftrightarrow z_3 = z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot \text{cis}(180^\circ)$



## Die Formel von de Moivre

Durch wiederholte Anwendung der Produktregel ergibt sich die *Formel von de Moivre*:

$$\begin{aligned}z^n &= z \cdot z \cdot \dots \cdot z \\ &= (r \cdot \operatorname{cis} \varphi) \cdot (r \cdot \operatorname{cis} \varphi) \cdot \dots \cdot (r \cdot \operatorname{cis} \varphi) \\ &= (r \cdot r \cdot \dots \cdot r) \cdot (\operatorname{cis} \varphi \cdot \operatorname{cis} \varphi \dots \cdot \operatorname{cis} \varphi) \\ &= r^n \cdot \operatorname{cis}(n \cdot \varphi)\end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl in Polarform wird mit einer natürlichen Zahl  $n$  potenziert, indem man ihren Radius mit  $n$  potenziert und den ihren Winkel mit  $n$  multipliziert.

Ist  $z = r \cdot \text{cis } \varphi$  eine komplexe Zahl, so gilt für ihren Kehrwert

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r \cdot \text{cis } \varphi}$$

Ist  $z = r \cdot \operatorname{cis} \varphi$  eine komplexe Zahl, so gilt für ihren Kehrwert

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r \cdot \operatorname{cis} \varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi}$$

Ist  $z = r \cdot \operatorname{cis} \varphi$  eine komplexe Zahl, so gilt für ihren Kehrwert

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{r \cdot \operatorname{cis} \varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi)} \end{aligned}$$



Ist  $z = r \cdot \operatorname{cis} \varphi$  eine komplexe Zahl, so gilt für ihren Kehrwert

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{r \cdot \operatorname{cis} \varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi)} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}\end{aligned}$$

Ist  $z = r \cdot \text{cis } \varphi$  eine komplexe Zahl, so gilt für ihren Kehrwert

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{r \cdot \text{cis } \varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi)} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{1}{r} \cdot [\cos \varphi - i \sin \varphi]\end{aligned}$$

Ist  $z = r \cdot \operatorname{cis} \varphi$  eine komplexe Zahl, so gilt für ihren Kehrwert

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{r \cdot \operatorname{cis} \varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi)} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{1}{r} \cdot [\cos \varphi - i \sin \varphi] \\ &= \frac{1}{r} \cdot [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]\end{aligned}$$

Ist  $z = r \cdot \operatorname{cis} \varphi$  eine komplexe Zahl, so gilt für ihren Kehrwert

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{r \cdot \operatorname{cis} \varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi)} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{1}{r} \cdot [\cos \varphi - i \sin \varphi] \\ &= \frac{1}{r} \cdot [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] \\ &= \frac{1}{r} \cdot \operatorname{cis}(-\varphi)\end{aligned}$$

## Quotientenregel

Wenden wir dieses Resultat und die Produktregel auf  $z_1 : z_2$  an, erhalten wir die *Quotientenregel* der Polarform:

$$\begin{aligned}z_1 : z_2 &= z_1 \cdot z_2^{-1} \\ &= r_1 \cdot \operatorname{cis}(\varphi_1) \cdot r_2^{-1} \cdot \operatorname{cis}(-\varphi_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)\end{aligned}$$

Zwei komplexe Zahlen in Polarform werden dividiert, indem man ihre Radien dividiert und ihre Winkel subtrahiert.

Mit  $z^0 = 1$  gilt damit die Formel von de Moivre für all  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Satz:** Es gilt  $r \cdot \operatorname{cis} \varphi = r \cdot e^{i\varphi}$  (Exponentialform komplexer Zahlen)

*Beweisskizze:* Zur Erinnerung

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und allgemein} \quad e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

Die Operationen für komplexen Zahlen wurden so definiert, dass die von den reellen Zahlen bekannten Rechenregeln auch in  $\mathbb{C}$  gültig sind (*Permanenzprinzip*). Daher ist der Grenzwert

$$e^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$$

sinnvoll definiert. Aber was stellt er dar? Eine geometrische Untersuchung von  $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$  in der Gaußschen Zahlenebene gibt einen Einblick.

## Die Potenz

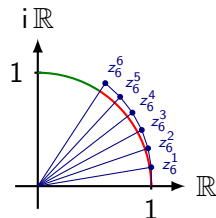
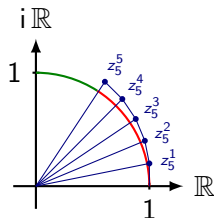
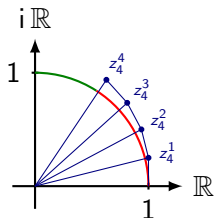
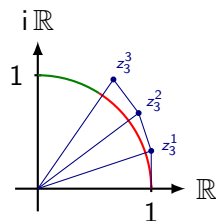
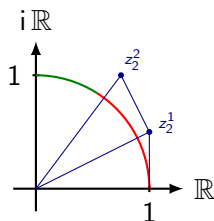
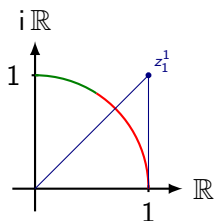
$$\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$$

kann als fortgesetzte Multiplikation mit  $z_n = 1 + i/n$  und somit geometrisch als Drehstreckung mit

- ▶ dem Streckungsfaktor  $|z_n| = \sqrt{1 + 1/n^2}$  und
- ▶ dem Drehwinkel  $\arg(z_n) = \arctan(1/n)$

gedeutet werden.

Beim Potenzieren von  $z_n$  entsteht somit eine Folge ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke, bei denen die längere Kathete eines aufgesetzten Dreiecks mit der Hypotenuse des darunter liegenden Dreiecks zusammenfällt.





## Die Potenzen

$$|z_n|^k = \left| 1 + \frac{i}{n} \right|^k = \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^k} \quad (1 \leq k \leq n)$$

bilden eine monoton wachsende Folge.

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$ z_1 ^1 \approx 1.414$	$ z_2 ^1 \approx 1.118$	$ z_3 ^1 \approx 1.054$	$ z_4 ^1 \approx 1.031$
	$ z_2 ^2 = 1.250$	$ z_3 ^2 \approx 1.111$	$ z_4 ^2 \approx 1.063$
		$ z_3 ^3 \approx 1.171$	$ z_4 ^3 \approx 1.095$
			$ z_4 ^4 \approx 1.129$

Offenbar gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{i}{n} \right|^n = 1$

Die Längen der kurzen Katheten bilden eine monoton wachsende Folge:

$$b_{n,k} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{k-1}} = \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{k-1}}$$

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$b_{1,1} = 1.000$	$b_{2,1} = 0.500$ $b_{2,2} \approx 0.559$	$b_{3,1} \approx 0.333$ $b_{3,2} \approx 0.351$ $b_{3,3} \approx 0.370$	$b_{4,1} = 0.250$ $b_{4,2} \approx 0.258$ $b_{4,3} \approx 0.266$ $b_{4,4} \approx 0.274$
$s_1 = 1.000$	$s_2 \approx 1.059$	$s_3 \approx 1.055$	$s_4 \approx 1.047$

Die Folge der Teilsummen ( $s_n$ ) konvergiert gegen 1.

Das bedeutet, dass der gesuchte Grenzwert die komplexe Zahl  $z$  mit  $|z| = 1$  und  $\arg z = 1$  ( $\varphi$  im Bogenmass) sein muss:

$$e^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i}{n} \right)^n = 1 \cdot \text{cis } 1 \quad (\text{Bogenmass})$$

Mit Hilfe des obigen Resultats und des Satzes von de Moivre gilt für  $\varphi \in \mathbb{Z}$ :

$$r \cdot e^{i \cdot \varphi} = r \cdot (e^i)^\varphi = r \cdot (1 \cdot \text{cis } 1)^\varphi = r \cdot 1^\varphi \cdot \text{cis}(\varphi \cdot 1) = r \cdot \text{cis } \varphi$$

□

## Bemerkung

In der Exponentialdarstellung benötigen wir keine „seperaten“ Rechenregeln für Produkte, Quotienten und Potenzen. Diese Operationen lassen sich mit den bekannten Potenzgesetzen erklären:

$$\blacktriangleright z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\blacktriangleright \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\blacktriangleright (z)^s = (r e^{i\varphi})^s = r^s \cdot e^{s \cdot i\varphi}$$

## Satz

Zwei komplexe Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  sind genau dann gleich, wenn ihre Real- und Imaginärteile übereinstimmen. Formal:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \quad \wedge \quad \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$$

## Beispiel 3.1

$$3z + 5\bar{z} = 1 + i$$

## Beispiel 3.1

$$3z + 5\bar{z} = 1 + i$$

$$\text{Ansatz: } z = x + iy$$

## Beispiel 3.1

$$3z + 5\bar{z} = 1 + i$$

Ansatz:  $z = x + iy$

$$3(x + iy) + 5(x - iy) = 1 + i$$



## Beispiel 3.1

$$3z + 5\bar{z} = 1 + i$$

Ansatz:  $z = x + iy$

$$3(x + iy) + 5(x - iy) = 1 + i$$

$$3x + 3iy + 5x - 5iy = 1 + i$$

## Beispiel 3.1

$$3z + 5\bar{z} = 1 + i$$

Ansatz:  $z = x + iy$

$$3(x + iy) + 5(x - iy) = 1 + i$$

$$3x + 3iy + 5x - 5iy = 1 + i$$

$$8x - 2iy = 1 + i$$

## Beispiel 3.1

$$3z + 5\bar{z} = 1 + i$$

Ansatz:  $z = x + iy$

$$3(x + iy) + 5(x - iy) = 1 + i$$

$$3x + 3iy + 5x - 5iy = 1 + i$$

$$8x - 2iy = 1 + i$$

Damit:

## Beispiel 3.1

$$3z + 5\bar{z} = 1 + i$$

Ansatz:  $z = x + iy$

$$3(x + iy) + 5(x - iy) = 1 + i$$

$$3x + 3iy + 5x - 5iy = 1 + i$$

$$8x - 2iy = 1 + i$$

Damit:

$$8x = 1$$

## Beispiel 3.1

$$3z + 5\bar{z} = 1 + i$$

Ansatz:  $z = x + iy$

$$3(x + iy) + 5(x - iy) = 1 + i$$

$$3x + 3iy + 5x - 5iy = 1 + i$$

$$8x - 2iy = 1 + i$$

Damit:

$$8x = 1$$

$$-2y = 1$$

## Beispiel 3.1

$$3z + 5\bar{z} = 1 + i$$

Ansatz:  $z = x + iy$

$$3(x + iy) + 5(x - iy) = 1 + i$$

$$3x + 3iy + 5x - 5iy = 1 + i$$

$$8x - 2iy = 1 + i$$

Damit:

$$\begin{array}{l} 8x = 1 \\ -2y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1/8 \\ y = -1/2 \end{array}$$

## Beispiel 3.1

$$3z + 5\bar{z} = 1 + i$$

Ansatz:  $z = x + iy$

$$3(x + iy) + 5(x - iy) = 1 + i$$

$$3x + 3iy + 5x - 5iy = 1 + i$$

$$8x - 2iy = 1 + i$$

Damit:

$$\begin{array}{l} 8x = 1 \\ -2y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1/8 \\ y = -1/2 \end{array} \Rightarrow z = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}i$$

## Beispiel 3.2

$$(2 - 2i)v + 3iw = 1 + 4i$$

$$(1 + 2i)v - 3w = 2 + 2i$$



## Beispiel 3.2

$$(2 - 2i)v + 3iw = 1 + 4i$$

$$(1 + 2i)v - 3w = 2 + 2i$$

Lineare Gleichungssysteme in  $\mathbb{C}$  können wie lineare Gleichungssysteme in  $\mathbb{R}$  gelöst werden.

## PAM-Formelsammlung S. 33 und 31

Ein lineares Gleichungssystem der Form

$$a_1x + b_1y = k_1$$

$$a_2x + b_2y = k_2$$

hat genau eine Lösung  $(x, y)$ , wenn

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0.$$

Dann ist  $x = D_x/D$  und  $y = D_y/D$ , wobei

$$D_x = \det \begin{pmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{pmatrix} = k_1b_2 - b_1k_2$$

$$D_y = \det \begin{pmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{pmatrix} = a_1k_2 - k_1a_2$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$
$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v =$$



$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 = 8 - (-7 + 6i) =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$
$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 = 8 - (-7 + 6i) = 15 - 6i$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 = 8 - (-7 + 6i) = 15 - 6i$$

$$v =$$



$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 = 8 - (-7 + 6i) = 15 - 6i$$

$$v = D_v / D =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$
$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 = 8 - (-7 + 6i) = 15 - 6i$$

$$v = D_v / D = (3 - 18i) / 3i =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$

$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 = 8 - (-7 + 6i) = 15 - 6i$$

$$v = D_v / D = (3 - 18i) / 3i = -6 - i$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i$$
$$a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 = 8 - (-7 + 6i) = 15 - 6i$$

$$v = D_v / D = (3 - 18i) / 3i = -6 - i$$

$$w =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i \\ a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 = 8 - (-7 + 6i) = 15 - 6i$$

$$v = D_v/D = (3 - 18i)/3i = -6 - i$$

$$w = D_w/D =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i \\ a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 = 8 - (-7 + 6i) = 15 - 6i$$

$$v = D_v/D = (3 - 18i)/3i = -6 - i$$

$$w = D_w/D = (15 - 6i)/3i =$$

$$\text{Koeffizienten: } a_1 = 2 - 2i \quad b_1 = 3i \quad k_1 = 1 + 4i \\ a_2 = 1 + 2i \quad b_2 = -3 \quad k_2 = 2 + 2i$$

$$D = a_1 b_2 - b_1 a_2 = (-6 + 6i) - (-6 + 3i) = 3i$$

$$D_v = k_1 b_2 - b_1 k_2 = (-3 - 12i) - (-6 + 6i) = 3 - 18i$$

$$D_w = a_1 k_2 - k_1 a_2 = 8 - (-7 + 6i) = 15 - 6i$$

$$v = D_v/D = (3 - 18i)/3i = -6 - i$$

$$w = D_w/D = (15 - 6i)/3i = -2 - 5i$$

## Beispiel 3.3

$$z^2 = 4i$$



## Beispiel 3.3

$$z^2 = 4i$$

Polarform:  $z^2 = 4i = 4 \operatorname{cis}(90^\circ + k \cdot 360^\circ)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$

## Beispiel 3.3

$$z^2 = 4i$$

Polarform:  $z^2 = 4i = 4 \operatorname{cis}(90^\circ + k \cdot 360^\circ)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$

de Moivre:  $z_k = \sqrt{4} \operatorname{cis}\left(\frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{2}\right)$

## Beispiel 3.3

$$z^2 = 4i$$

Polarform:  $z^2 = 4i = 4 \operatorname{cis}(90^\circ + k \cdot 360^\circ)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$

de Moivre:  $z_k = \sqrt{4} \operatorname{cis}\left(\frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{2}\right)$

$$z_0 = 2 \operatorname{cis} 45^\circ = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

## Beispiel 3.3

$$z^2 = 4i$$

Polarform:  $z^2 = 4i = 4 \operatorname{cis}(90^\circ + k \cdot 360^\circ)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$

de Moivre:  $z_k = \sqrt{4} \operatorname{cis}\left(\frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{2}\right)$

$$z_0 = 2 \operatorname{cis} 45^\circ = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} 225^\circ = 2(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

## Beispiel 3.3

$$z^2 = 4i$$

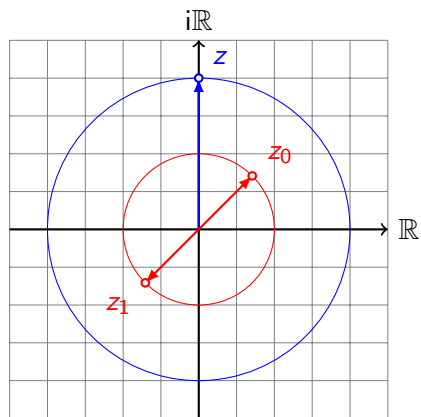
Polarform:  $z^2 = 4i = 4 \operatorname{cis}(90^\circ + k \cdot 360^\circ)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$

de Moivre:  $z_k = \sqrt{4} \operatorname{cis}\left(\frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{2}\right)$

$$z_0 = 2 \operatorname{cis} 45^\circ = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} 225^\circ = 2(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} 405^\circ = 2 \operatorname{cis} 45^\circ = z_0 \quad (\text{keine neue Lösung})$$



## Beispiel 3.4

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

Polarform:  $r =$

## Beispiel 3.4

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\text{Polarform: } r = \sqrt{4 + 12} = 4$$



## Beispiel 3.4

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\text{Polarform: } r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\varphi = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} + 180^\circ$$

## Beispiel 3.4

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\text{Polarform: } r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\varphi = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} + 180^\circ = -\arctan \sqrt{3} + 180^\circ$$

## Beispiel 3.4

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\text{Polarform: } r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} + 180^\circ = -\arctan \sqrt{3} + 180^\circ \\ &= -60^\circ + 180^\circ\end{aligned}$$

## Beispiel 3.4

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\text{Polarform: } r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} + 180^\circ = -\arctan \sqrt{3} + 180^\circ \\ &= -60^\circ + 180^\circ = 120^\circ\end{aligned}$$

## Beispiel 3.4

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\text{Polarform: } r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} + 180^\circ = -\arctan \sqrt{3} + 180^\circ \\ &= -60^\circ + 180^\circ = 120^\circ\end{aligned}$$

$$z^2 = 4 \operatorname{cis}(120^\circ + k \cdot 360^\circ), \quad k \in \mathbb{Z}$$

## Beispiel 3.4

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\text{Polarform: } r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} + 180^\circ = -\arctan \sqrt{3} + 180^\circ \\ &= -60^\circ + 180^\circ = 120^\circ\end{aligned}$$

$$z^2 = 4 \operatorname{cis}(120^\circ + k \cdot 360^\circ), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{120^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{2} = 2 \operatorname{cis} 60^\circ$$

## Beispiel 3.4

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

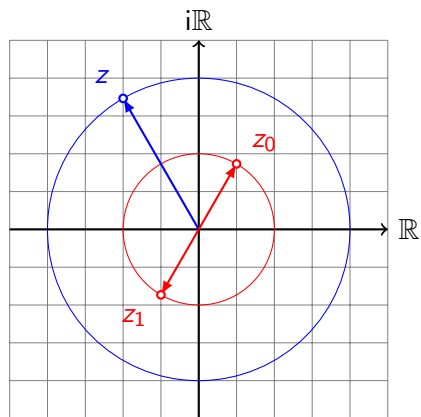
$$\text{Polarform: } r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} + 180^\circ = -\arctan \sqrt{3} + 180^\circ \\ &= -60^\circ + 180^\circ = 120^\circ\end{aligned}$$

$$z^2 = 4 \operatorname{cis}(120^\circ + k \cdot 360^\circ), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{120^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{2} = 2 \operatorname{cis} 60^\circ$$

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{120^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{2} = 2 \operatorname{cis} 240^\circ$$





Das Lösungsverfahren lässt sich auf Gleichungen der Form  $z^n = c$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) verallgemeinern:

**Satz:** Die Gleichung

$$z^n = c = r \cdot \operatorname{cis} \varphi, \quad (n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C})$$

hat  $n$  verschiedene Lösungen in  $\mathbb{C}$

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis} \left( \frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

## Beweis

Wir setzen die Lösung(en) in die Gleichung ein und rechnen mit der Formel von de Moivre:

$$\begin{aligned} z_k^n &= \left[ \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis} \left( \frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n} \right) \right]^n = r \cdot \operatorname{cis} \left( n \cdot \frac{\varphi}{n} + n \cdot k \cdot \frac{360^\circ}{n} \right) \\ &= r \cdot \operatorname{cis} (\varphi + k \cdot 360^\circ) = r \cdot \operatorname{cis} \varphi = c \end{aligned}$$



## Beispiel 3.5

$$z^6 = -32 + 32\sqrt{3}i$$

## Beispiel 3.5

$$z^6 = -32 + 32\sqrt{3}i = 64 \cdot \text{cis } 120^\circ$$

## Beispiel 3.5

$$z^6 = -32 + 32\sqrt{3}i = 64 \cdot \text{cis } 120^\circ$$

$$z_0 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 0 \cdot 60^\circ) = 2 \text{cis } 20^\circ$$

## Beispiel 3.5

$$z^6 = -32 + 32\sqrt{3}i = 64 \cdot \text{cis } 120^\circ$$

$$z_0 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 0 \cdot 60^\circ) = 2 \text{cis } 20^\circ$$

$$z_1 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 1 \cdot 60^\circ) = 2 \text{cis } 80^\circ$$

## Beispiel 3.5

$$z^6 = -32 + 32\sqrt{3}i = 64 \cdot \text{cis } 120^\circ$$

$$z_0 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 0 \cdot 60^\circ) = 2 \text{cis } 20^\circ$$

$$z_1 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 1 \cdot 60^\circ) = 2 \text{cis } 80^\circ$$

$$z_2 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 2 \cdot 60^\circ) = 2 \text{cis } 140^\circ$$

## Beispiel 3.5

$$z^6 = -32 + 32\sqrt{3}i = 64 \cdot \text{cis } 120^\circ$$

$$z_0 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 0 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 20^\circ$$

$$z_1 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 1 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 80^\circ$$

$$z_2 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 2 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 140^\circ$$

$$z_3 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 3 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 200^\circ$$



## Beispiel 3.5

$$z^6 = -32 + 32\sqrt{3}i = 64 \cdot \text{cis } 120^\circ$$

$$z_0 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 0 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 20^\circ$$

$$z_1 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 1 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 80^\circ$$

$$z_2 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 2 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 140^\circ$$

$$z_3 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 3 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 200^\circ$$

$$z_4 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 4 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 260^\circ$$

## Beispiel 3.5

$$z^6 = -32 + 32\sqrt{3}i = 64 \cdot \text{cis } 120^\circ$$

$$z_0 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 0 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 20^\circ$$

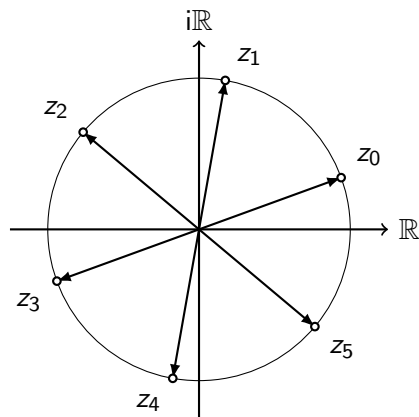
$$z_1 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 1 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 80^\circ$$

$$z_2 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 2 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 140^\circ$$

$$z_3 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 3 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 200^\circ$$

$$z_4 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 4 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 260^\circ$$

$$z_5 = \sqrt[6]{64} \cdot \text{cis}(20^\circ + 5 \cdot 60^\circ) = 2 \text{ cis } 320^\circ$$



Aus diesem Grund wird  $z^n = c$  *Kreisteilungsgleichung* genannt.

## Beispiel 4.4

$$(1 + i)z^2 - (6 + 2i)z + 9 + 13i = 0$$

## Beispiel 4.4

$$(1 + i)z^2 - (6 + 2i)z + 9 + 13i = 0$$

$$a = 1 + i$$

## Beispiel 4.4

$$(1 + i)z^2 - (6 + 2i)z + 9 + 13i = 0$$

$$a = 1 + i$$

$$b = -6 - 2i$$

## Beispiel 4.4

$$(1 + i)z^2 - (6 + 2i)z + 9 + 13i = 0$$

$$a = 1 + i$$

$$b = -6 - 2i$$

$$c = 9 + 13i$$

## Beispiel 4.4

$$(1 + i)z^2 - (6 + 2i)z + 9 + 13i = 0$$

$$a = 1 + i$$

$$b = -6 - 2i$$

$$c = 9 + 13i$$



## Beispiel 4.4

$$(1 + i)z^2 - (6 + 2i)z + 9 + 13i = 0$$

$$a = 1 + i$$

$$b = -6 - 2i$$

$$c = 9 + 13i$$

$$D = b^2 - 4ac$$

## Beispiel 4.4

$$(1 + i)z^2 - (6 + 2i)z + 9 + 13i = 0$$

$$a = 1 + i$$

$$b = -6 - 2i$$

$$c = 9 + 13i$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (6 + 2i)^2 - 4(1 + i)(9 + 13i)$$

## Beispiel 4.4

$$(1 + i)z^2 - (6 + 2i)z + 9 + 13i = 0$$

$$a = 1 + i$$

$$b = -6 - 2i$$

$$c = 9 + 13i$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (6 + 2i)^2 - 4(1 + i)(9 + 13i)$$

$$= 32 + 24i - 4(-4 + 22i)$$

## Beispiel 4.4

$$(1 + i)z^2 - (6 + 2i)z + 9 + 13i = 0$$

$$a = 1 + i$$

$$b = -6 - 2i$$

$$c = 9 + 13i$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (6 + 2i)^2 - 4(1 + i)(9 + 13i)$$

$$= 32 + 24i - 4(-4 + 22i)$$

$$= 32 + 24i + (16 - 88i)$$

## Beispiel 4.4

$$(1 + i)z^2 - (6 + 2i)z + 9 + 13i = 0$$

$$a = 1 + i$$

$$b = -6 - 2i$$

$$c = 9 + 13i$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (6 + 2i)^2 - 4(1 + i)(9 + 13i)$$

$$= 32 + 24i - 4(-4 + 22i)$$

$$= 32 + 24i + (16 - 88i)$$

$$= 48 - 64i$$

Lösung mit Ansatz  $z = x + iy$ :

$$z^2 = 48 - 64i$$

Lösung mit Ansatz  $z = x + iy$ :

$$z^2 = 48 - 64i$$

$$(x + iy)^2 = 48 - 64i$$

Lösung mit Ansatz  $z = x + iy$ :

$$z^2 = 48 - 64i$$

$$(x + iy)^2 = 48 - 64i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 48 - 64i$$



Lösung mit Ansatz  $z = x + iy$ :

$$z^2 = 48 - 64i$$

$$(x + iy)^2 = 48 - 64i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 48 - 64i$$

Gleichungssystem:

Lösung mit Ansatz  $z = x + iy$ :

$$z^2 = 48 - 64i$$

$$(x + iy)^2 = 48 - 64i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 48 - 64i$$

Gleichungssystem:

$$x^2 - y^2 = 48$$

Lösung mit Ansatz  $z = x + iy$ :

$$z^2 = 48 - 64i$$

$$(x + iy)^2 = 48 - 64i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 48 - 64i$$

Gleichungssystem:

$$x^2 - y^2 = 48$$

$$2xy = -64$$

Lösung mit Ansatz  $z = x + iy$ :

$$z^2 = 48 - 64i$$

$$(x + iy)^2 = 48 - 64i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 48 - 64i$$

Gleichungssystem:

$$x^2 - y^2 = 48$$

$$2xy = -64 \quad \Leftrightarrow \quad xy = -32$$

Lösung mit Ansatz  $z = x + iy$ :

$$z^2 = 48 - 64i$$

$$(x + iy)^2 = 48 - 64i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 48 - 64i$$

Gleichungssystem:

$$x^2 - y^2 = 48$$

$$2xy = -64 \quad \Leftrightarrow \quad xy = -32$$

$$x = \pm 8, y = \mp 4$$

Lösung mit Ansatz  $z = x + iy$ :

$$z^2 = 48 - 64i$$

$$(x + iy)^2 = 48 - 64i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 48 - 64i$$

Gleichungssystem:

$$x^2 - y^2 = 48$$

$$2xy = -64 \quad \Leftrightarrow \quad xy = -32$$

$$x = \pm 8, \quad y = \mp 4$$

$$d_1 = 8 - 4i, \quad d_2 = -8 + 4i$$

$$z_1 = \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\ &= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\ &= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{7 - i}{1 + i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\ &= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{7 - i}{1 + i} = \frac{(7 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\ &= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{7 - i}{1 + i} = \frac{(7 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\ &= \frac{6 - 8i}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\ &= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{7 - i}{1 + i} = \frac{(7 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\ &= \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\&= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{7 - i}{1 + i} = \frac{(7 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\&= \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i \\z_2 &= \frac{-b + d_2}{2a} = \frac{6 + 2i - 8 + 4i}{2(1 + i)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\&= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{7 - i}{1 + i} = \frac{(7 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\&= \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2 &= \frac{-b + d_2}{2a} = \frac{6 + 2i - 8 + 4i}{2(1 + i)} \\&= \frac{-2 + 6i}{2(1 + i)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\ &= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{7 - i}{1 + i} = \frac{(7 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\ &= \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2 &= \frac{-b + d_2}{2a} = \frac{6 + 2i - 8 + 4i}{2(1 + i)} \\ &= \frac{-2 + 6i}{2(1 + i)} = \frac{-1 + 3i}{1 + i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\&= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{7 - i}{1 + i} = \frac{(7 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\&= \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2 &= \frac{-b + d_2}{2a} = \frac{6 + 2i - 8 + 4i}{2(1 + i)} \\&= \frac{-2 + 6i}{2(1 + i)} = \frac{-1 + 3i}{1 + i} = \frac{(-1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\&= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{7 - i}{1 + i} = \frac{(7 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\&= \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2 &= \frac{-b + d_2}{2a} = \frac{6 + 2i - 8 + 4i}{2(1 + i)} \\&= \frac{-2 + 6i}{2(1 + i)} = \frac{-1 + 3i}{1 + i} = \frac{(-1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\&= \frac{2 + 4i}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 + 2i + 8 - 4i}{2(1 + i)} \\&= \frac{14 - 2i}{2(1 + i)} = \frac{7 - i}{1 + i} = \frac{(7 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\&= \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2 &= \frac{-b + d_2}{2a} = \frac{6 + 2i - 8 + 4i}{2(1 + i)} \\&= \frac{-2 + 6i}{2(1 + i)} = \frac{-1 + 3i}{1 + i} = \frac{(-1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\&= \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i\end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung und deren Lösung sind schon seit etwa 2000 v. Chr. bekannt.

Auch kubische Gleichungen traten in der altgriechischen, der indischen und der arabischen Mathematik auf. Diese Gleichungen konnten dank Heron von Alexandria (ca. 100 v. Chr.) näherungsweise gelöst werden, indem er alte babylonische und ägyptische Näherungsverfahren zum Wurzelziehen anwendete.

Die Auflösung der allgemeinen Gleichungen dritten Grades wurden jedoch erst in der Zeit der Renaissance unabhängig von Scipione del Ferro (um 1465–1526) und von Niccolo Tartaglia (um 1500–1557) gefunden. Die Resultate von del Ferro blieben unveröffentlicht. Tartaglia verriet – unter der Bedingung der Geheimhaltung – seine Lösungsformel dem venezianischen Professor Geronimo Cardano (1501–1576), der jedoch sein Versprechen brach und die Formel unter seinem eigenen Namen veröffentlichte.

Die Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

mit  $a \neq 0$  wird **allgemeine Form** der kubischen Gleichung genannt.  
Die Division durch  $a$  führt zur **normierten Form**

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0 \quad (2)$$

mit  $r = b/a$ ,  $s = c/a$  und  $t = d/a$ .

Substitution  $x = y - r/3$ :

$$x^3 = \left(y - \frac{r}{3}\right)^3 = \dots = y^3 - ry^2 + \frac{r^2}{3}y - \frac{r^3}{27}$$

$$x^2 = \left(y - \frac{r}{3}\right)^2 = y^2 - \frac{2r}{3}y + \frac{r^2}{9}$$

$$x = y - \frac{r}{3}$$

Setzt man diese Terme in die Gleichung  $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$  ein, erhält man:

$$y^3 - ry^2 + \frac{r^2}{3}y - \frac{r^3}{27} + r\left(y^2 - \frac{2r}{3}y + \frac{r^2}{9}\right) + s\left(y - \frac{r}{3}\right) + t = 0$$

$$y^3 - ry^2 + \frac{r^2}{3}y - \frac{r^3}{27} + ry^2 - \frac{2r^2}{3}y + \frac{r^3}{9} + sy - \frac{rs}{3} + t = 0$$

$$y^3 + \left(s - \frac{r^2}{3}\right)y + \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 0$$

Aus  $p = s - \frac{r^2}{3}$  und  $q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = 0$  folgt die **reduzierte Form**:

$$y^3 + py + q = 0 \quad (3)$$

Sind  $y_1$ ,  $y_2$  und  $y_3$  Lösungen von (3), so sind

$$x_1 = y_1 - r/3$$

$$x_2 = y_2 - r/3$$

$$x_3 = y_3 - r/3$$

Lösungen von (2).

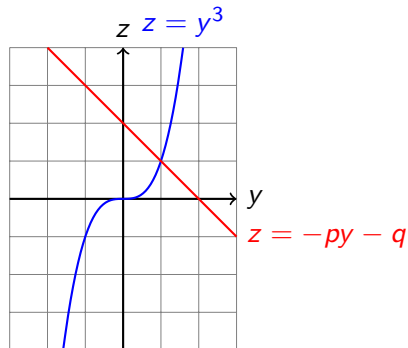


Löst man (3) nach  $y^3$  auf, so erhält man

$$y^3 = -py - q \quad (4)$$

## Bemerkung

Gleichung (4) eignet sich auch unter anderem dazu, eine graphische Näherungslösung von (3) zu bestimmen:



Wir suchen die Lösungen für  $y^3 = -py - q$

Für zwei beliebige Zahlen  $u$  und  $v$  gilt:

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u + v)^3 = 3uv(u + v) + u^3 + v^3$$

Ersetze  $u + v$  durch  $y$ :

$$y^3 = 3uvy + u^3 + v^3$$

Ein Koeffizientenvergleich mit  $y^3 = -py - q$  zeigt, dass  $y = u + v$  eine Lösung von (4) ist, wenn die Zahlen  $u$  und  $v$  folgende Gleichungen erfüllen:

$$3uv = -p \quad (5)$$

$$u^3 + v^3 = -q \quad (6)$$

## Exkurs: Der Satz von Vieta

Der Satz von Vieta beschreibt die Beziehungen der Lösungen einer algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades und ihren Koeffizienten.

Für die quadratischen Gleichung ( $n = 2$ ) gilt:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 + a_1x + a_0 = x^2 - x_1 - x_2 + x_1x_2$$

$$x^2 + a_1x + a_0 = x^2 - (x_1 + x_2) + x_1x_2$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt:

$$a_1 = -(x_1 + x_2)$$

$$a_0 = x_1x_2$$

Nun löst man Gleichung (5) nach  $uv$  auf

$$uv = -\frac{p}{3} \quad (5.1)$$

und potenziert die neue Gleichung mit 3:

$$u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (5.2)$$

Nach dem Satz von Vieta sind  $u^3$  und  $v^3$  Lösungen der Gleichung

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

wobei

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (7)$$

oder

$$u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (8)$$

Aus Symmetriegründen genügt es, nur eines der Lösungspaare – beispielsweise (7) – weiter zu untersuchen.

Ist  $u_1$  eine Lösung der Gleichung

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

und sind

$$\tau = \operatorname{cis} 120^\circ = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tau^2 = \operatorname{cis} 240^\circ = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

die komplexen Zahlen, welche die Drehung um  $120^\circ$  bzw.  $240^\circ$  darstellen, so sind  $u_2 = u_1\tau$  und  $u_3 = u_1\tau^2$  die anderen beiden Lösungen.

Analog: Ist  $v_1$  eine Lösung der Gleichung

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

so sind  $v_2 = v_1\tau$  und  $v_3 = v_1\tau^2$  die anderen beiden Lösungen.



Damit kommen als Lösungen für  $(u, v)$  zunächst 9 Kandidaten in Frage:

$$\begin{array}{lll} (u_1, v_1) & (u_1\tau, v_1) & (u_1\tau^2, v_1) \\ (u_1, v_1\tau) & (u_1\tau, v_1\tau) & (u_1\tau^2, v_1\tau) \\ (u_1, v_1\tau^2) & (u_1\tau, v_1\tau^2) & (u_1\tau^2, v_1\tau^2) \end{array}$$

Da nach Konstruktion jedes Lösungspaar  $(u, v)$  die Gleichungen in (7) erfüllt, gilt auch

$$u^3 + v^3 = \dots = -q$$

und

$$u^3 v^3 = \dots = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right] = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

wie man leicht nachrechnet.

Damit erfüllen alle Kandidaten die Gleichungen (6) und (5.2).

Welche Kandidaten erfüllen auch die Gleichung  $3uv = -p$ ?

Zu einer beliebigen Lösung  $u_1$  von

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

bestimmen wir  $v_1$ , so dass  $3u_1v_1 = -p$  ist.

Dann gilt:

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1}$$

und

$$\begin{aligned} v_1^3 &= -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{u_1^3} = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ &= \frac{-\left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)}{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right) \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)} \\ &= \frac{-\left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)}{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \end{aligned}$$

Also ist  $v_1$  eine Lösung von

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

und  $(u_1, v_1)$  eine Lösung von (5).

Wegen

$$3u_1\tau^i v_1\tau^j = 3u_1 v_1 \tau^{i+j} = -p \in \mathbb{R}$$

muss  $\tau^{i+j} = 1$  gelten und daher erfüllen nur die drei Paare

$$(u_1, u_2), (u_1\tau, u_2\tau^2) \text{ und } (u_1\tau^2, u_2\tau)$$

die Gleichungen (5) und (6).

Die drei Zahlen

$$y_1 = u_1 + v_1$$

$$y_2 = u_1\tau + v_1\tau^2$$

$$y_3 = u_1\tau^2 + v_1\tau$$

Sind daher Lösungen der Gleichung (2).

Da eine Polynomgleichung dritten Grades nicht mehr als drei Lösungen besitzt, wurden alle Lösungen gefunden.

Es soll nun noch geklärt werden, wann reelle Lösungen und wann reelle und komplexe Lösungen auftreten.

Dazu betrachten wir den Term

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

der in den (Teil-)Lösungen

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

auftritt und die Struktur der Lösungen definiert. Aus diesem Grund wird  $D$  ebenfalls **Diskriminante** genannt.

## 1. Fall $D > 0$

Aus  $D > 0$  folgt, dass

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} \quad \text{und} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D}$$

reell sind. Damit sind aber auch

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

reell.



$$y_1 = u + v$$

$$y_2 = u\tau + v\tau^2$$

$$= u \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + v \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -\frac{u+v}{2} + i \frac{u-v}{2} \sqrt{3}$$

$$y_2 = u\tau^2 + v\tau$$

$$= u \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + v \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -\frac{u+v}{2} - i \frac{u-v}{2} \sqrt{3}$$

## 2. Fall $D = 0$

Aus  $D = 0$  folgt

$$u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

und als Spezialfälle der oben hergeleiteten Lösungen erhält man:

$$y_1 = u + v = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = -\sqrt[3]{4q}$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + i\frac{u-v}{2}\sqrt{3} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - i\frac{u-v}{2}\sqrt{3} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

### 3. Fall $D < 0$ (Casus irreducibilis)

$$\text{Aus } D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0 \text{ folgt } p < 0.$$

### 3. Fall $D < 0$ (Casus irreducibilis)

Aus  $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$  folgt  $p < 0$ .

Es gilt  $\sqrt{D} = \sqrt{(-1)^2 D} = i\sqrt{-D}$  mit  $\sqrt{-D} \in \mathbb{R}$

### 3. Fall $D < 0$ (Casus irreducibilis)

Aus  $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$  folgt  $p < 0$ .

Es gilt  $\sqrt{D} = \sqrt{(-1)^2 D} = i\sqrt{-D}$  mit  $\sqrt{-D} \in \mathbb{R}$

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D} = \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \varrho \operatorname{cis}(\varphi)$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D} = \varrho(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \varrho \operatorname{cis}(-\varphi)$$

wobei

$$\varrho = |u^3| = |v^3| = \sqrt{\frac{q^2}{2} + (-D)} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\sqrt{\frac{p^3}{27}} \quad \text{da } p < 0$$

Ein Vergleich der Real und Imaginärteile in den Gleichungen

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D} = \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D} = \varrho(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

führt zu:

$$-\frac{q}{2} = \varrho \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = -\frac{q}{2\varrho} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{q}{2\varrho}\right)$$

oder zu:

$$\sqrt{-D} = \varrho \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{-D}}{2\varrho} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\arcsin \frac{\sqrt{-D}}{2\varrho}$$

Mit der Formel von de Moivre erhalten wir

$$u_1 = \sqrt[3]{\varrho} \cdot \operatorname{cis} \frac{\varphi}{3} \quad \text{und} \quad v_1 = \sqrt[3]{\varrho} \cdot \operatorname{cis} \frac{-\varphi}{3}$$

und damit

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 = \sqrt[3]{\varrho} \cdot \operatorname{cis} \frac{\varphi}{3} + \sqrt[3]{\varrho} \cdot \operatorname{cis} \frac{-\varphi}{3} \\ &= \sqrt[3]{\varrho} \cdot \left[ \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} + \cos \frac{-\varphi}{3} - i \sin \frac{-\varphi}{3} \right] \\ &= 2\sqrt[3]{\varrho} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2 &= u_1\tau + v_1\tau^2 \\&= \sqrt[3]{\varrho} \left[ \operatorname{cis} \frac{\varphi}{3} \cdot \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} + \operatorname{cis} \frac{-\varphi}{3} \cdot \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} \right] \\&= \sqrt[3]{\varrho} \left[ \operatorname{cis} \frac{\varphi + 2\pi}{3} + \operatorname{cis} \frac{-\varphi + 4\pi}{3} \right] \\&= \sqrt[3]{\varrho} \left[ \operatorname{cis} \frac{\varphi + 2\pi}{3} + \operatorname{cis} \left( \frac{-\varphi + 4\pi}{3} - 2\pi \right) \right] \\&= \sqrt[3]{\varrho} \left[ \operatorname{cis} \frac{\varphi + 2\pi}{3} + \operatorname{cis} \left( -\frac{\varphi + 2\pi}{3} \right) \right] \\&= \sqrt[3]{\varrho} \left[ \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{3} + \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} - i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{3} \right] \\&= 2\sqrt[3]{\varrho} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}y_3 &= u_1 \tau^2 + v_1 \tau \\&= \sqrt[3]{\varrho} \left[ \operatorname{cis} \frac{\varphi}{3} \cdot \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{cis} \frac{-\varphi}{3} \cdot \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} \right] \\&= \sqrt[3]{\varrho} \left[ \operatorname{cis} \frac{\varphi + 4\pi}{3} + \operatorname{cis} \frac{-\varphi + 2\pi}{3} \right] \\&= \sqrt[3]{\varrho} \left[ \operatorname{cis} \frac{\varphi + 4\pi}{3} + \operatorname{cis} \left( \frac{-\varphi + 2\pi}{3} - 2\pi \right) \right] \\&= \sqrt[3]{\varrho} \left[ \operatorname{cis} \frac{\varphi + 4\pi}{3} + \operatorname{cis} \left( -\frac{\varphi + 4\pi}{3} \right) \right] \\&= \sqrt[3]{\varrho} \left[ \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 4\pi}{3} + \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} - i \sin \frac{\varphi + 4\pi}{3} \right] \\&= 2\sqrt[3]{\varrho} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}\end{aligned}$$

## Achtung

Nicht vergessen die Rücksubstitution

$$x_i = y_i - \frac{r}{3} \quad (i = 1, 2, 3)$$

durchzuführen.

Die formelmässige Auflösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades wurde von *Ludovico Ferrari* (1522–1565) – einem Schüler und Mitarbeiter von Geronimo Cardano gefunden.

Hier soll die Auflösung nach René Descartes (1596–1650) gezeigt werden.

Zuerst wird die Gleichung 4. Grades auf Normalform

$$x^4 + sx^3 + tx^2 + ux + v = 0$$

und anschliessend mit der Substitution  $x = y - s/4$  auf die reduzierte Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

gebracht, wobei

$$p = t - \frac{3}{8}s^2 + t$$

$$q = \frac{1}{8}s^3 - \frac{1}{2}ts + u$$

$$r = -\frac{3}{256}s^4 + \frac{1}{16}ts^2 - \frac{1}{4}us + v$$

Dann wählt man den Ansatz für die Zerlegung der reduzierten Form in ein Produkt aus zwei quadratischen Faktoren:

$$\begin{aligned}x^4 + px^2 + qx + r &= (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c) \\ &= x^4 + (-a^2 + b - c)x^2 + a(c - b)x + bc\end{aligned}$$

Die Zerlegung ist so gewählt, dass beim Ausmultiplizieren keine dritten Potenzen von  $x$  entstehen. Ein Vergleich der entsprechenden Koeffizienten links und rechts des Gleichheitszeichens ergibt das Gleichungssystem

$$b + c - a^2 = p$$

$$a(c - b) = q$$

$$bc = r$$

Zunächst löst man die oberste Gleichung nach  $b$  und die mittlere nach  $c$  auf:

Zunächst löst man die oberste Gleichung nach  $b$  und die mittlere nach  $c$  auf:

$$b = p + a^2 - c$$

$$c = \frac{q}{a} + b$$



Zunächst löst man die oberste Gleichung nach  $b$  und die mittlere nach  $c$  auf:

$$b = p + a^2 - c$$

$$c = \frac{q}{a} + b$$

Dann setzt man gegenseitig ein:

Zunächst löst man die oberste Gleichung nach  $b$  und die mittlere nach  $c$  auf:

$$b = p + a^2 - c$$

$$c = \frac{q}{a} + b$$

Dann setzt man gegenseitig ein:

$$b = p + a^2 - \left( \frac{q}{a} + b \right)$$

$$c = \frac{q}{a} + p + a^2 - c$$

Zunächst löst man die oberste Gleichung nach  $b$  und die mittlere nach  $c$  auf:

$$b = p + a^2 - c$$

$$c = \frac{q}{a} + b$$

Dann setzt man gegenseitig ein:

$$b = p + a^2 - \left( \frac{q}{a} + b \right)$$

$$c = \frac{q}{a} + p + a^2 - c$$

$$2b = a^2 + p - \frac{q}{a}$$

$$2c = a^2 + p + \frac{q}{a}$$

Nun setzen wir diese Terme in die mit 4 multiplizierte unterste Gleichung  $4bc = 4r$  ein:

$$\left(a^2 + p - \frac{q}{a}\right) \left(a^2 + p + \frac{q}{a}\right) = 4r$$

$$a^4 + 2a^2p + p^2 - \frac{q^2}{a^2} = 4r$$

$$a^6 + 2a^4 + (p^2 - 4r)a^2 - q^2 = 0$$

$$w^3 + 2w^2 + (p^2 - 4r)w - q^2 = 0$$

wobei  $a^2$  durch  $w$  substituiert wurde.

Diese Gleichung dritten Grades wird *kubische Resolvente* genannt und besitzt mindestens eine reelle Lösung  $w_1$ , die zwischen  $w = 0$  und  $w = \infty$  liegt; also *positiv* ist.

Aus  $a = \sqrt{w_1}$  lassen sich  $b$  und  $c$  und damit die beiden quadratischen Faktoren

$$(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$$

der Gleichung bestimmen. Diese Faktoren lassen sich jedoch mit der entsprechenden Lösungsformel berechnen. Es gibt somit folgende Fälle:

- ▶ 4 reelle Lösungen
- ▶ 2 reelle und ein Paar konjugiert komplexer Lösungen
- ▶ 2 Paare konjugiert komplexer Lösungen

Der Fundamentalsatz der Algebra macht nur eine Aussage über die Existenz von Lösungen einer algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades.

Wie diese Lösungen im Fall  $n = 1, 2, 3$ , und  $4$  gefunden werden können, haben wir bereits gesehen.

Lange Zeit suchte man nach einer Lösungsformel für die algebraischen Gleichungen vom Grad  $n \geq 4$ . Die Hoffnung wurde dadurch genährt, dass in speziellen Fällen wie zum Beispiel  $ax^5 + b = 0$  oder  $ax^5 + bx^4 + bx^3 = 0$  durchaus Lösungsformeln zu finden sind.

Zunächst konnte Nils Henrik Abel (1802–1829) beweisen, dass für die *allgemeine* algebraische Gleichung 5. Grades keine Lösungsformel gefunden werden kann.

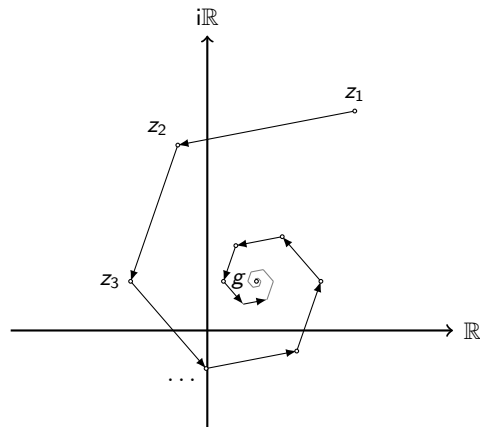
Das war noch nicht genug.

Evariste Galois (1811–1832) erkannte, dass jeder algebraischen Gleichung eine spezielle Gruppe zugeordnet werden kann. Die Struktur dieser Gruppe gibt Auskunft darüber, wie die Lösungen der zugehörigen Gleichung gefunden werden können. Er bewies zudem, dass für algebraische Gleichungen vom Grad größer als 4 die Struktur der zugehörigen Gruppen nicht mehr in jedem Fall eine Auflösung mit algebraischen Mitteln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzeln) zulassen.

Eine komplexen Zahlenfolge  $(z_n)$ ,  $(n \in \mathbb{N}, z_n \in \mathbb{C})$  kann als Folge von Punkten in der Gausschen Zahlenebene gedeutet werden. Wir unterscheiden folgende Situationen:

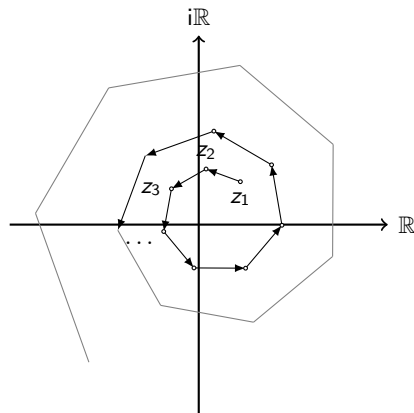


## Konvergente Folge



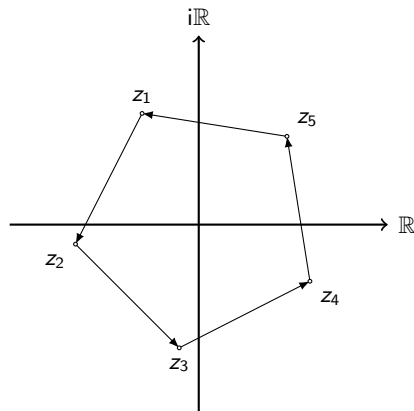
Die Punktfolge konvergiert gegen den Grenzpunkt  $g$ .

## Divergente Folge

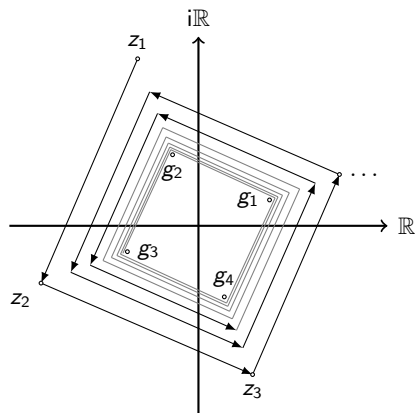


Die Punktfolge divergiert.

# Zyklus



Die Punktfolge ist ein Zyklus mit  $k = 5$  periodischen Punkten.



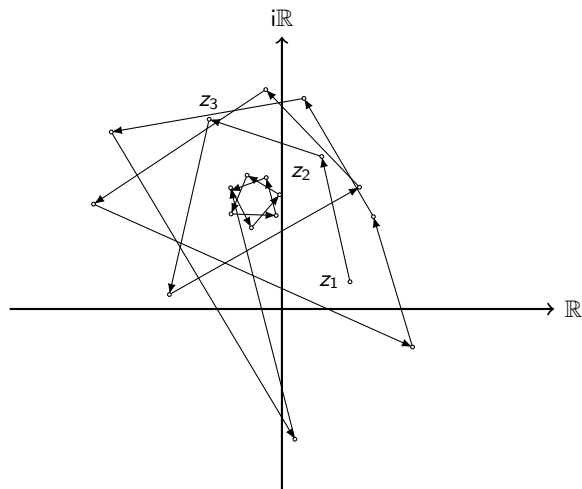
Die Punktfolge *strebt* gegen einen Zyklus mit  $k = 4$  periodischen Punkten.

## Iteration einer Funktion $f: z \rightarrow f(z)$

Ist  $z_1 \in \mathbb{C}$  und  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, so wird die Folge

$$z_1, z_2 = f(z_1), z_3 = f(z_2), z_4 = f(z_3), \dots$$

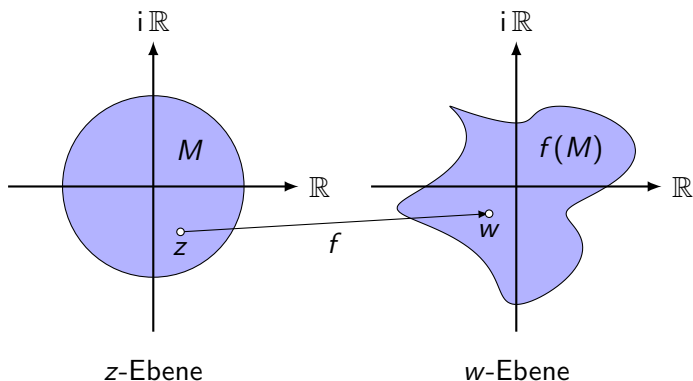
*Bahn* von  $z_1$  der Funktion  $f$  genannt.



Bahn von  $z_1 = 0.6 - 0.4i$  der Funktion  $f(z) = z^2 + 0.1 + 0.6i$

Eine komplexe Funktion  $f$  ordnet jeder Zahl  $z$  aus einer Definitionsmenge  $D \subset \mathbb{C}$  genau eine komplexe Zahl  $w \in \mathbb{C}$  zu. Der Funktion entspricht in der Zahlenebene eine Abbildung, die jedem Originalpunkt  $P(z)$  den Bildpunkt  $P'(w)$  zuordnet.

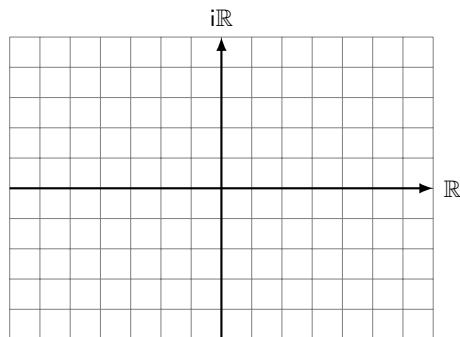
Wir benützen zwei Exemplare der Zahlenebene, die  $z$ -Ebene und die  $w$ -Ebene. Häufig identifizieren wir die beiden Ebenen, wir zeichnen Original- und Bildpunkte in dieselbe Zahlenebene ein.





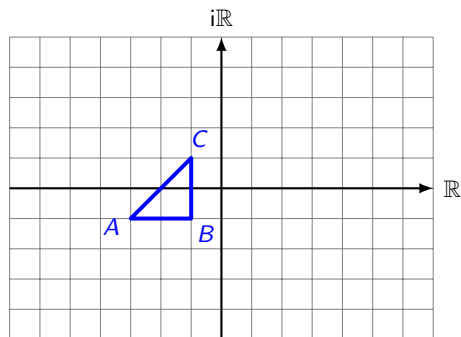
## Aufgabe 5.1

Gegeben:  $f(z) = z + 5 + 3i$  und die Punkte  $A(-3 - i)$ ,  $B(-1 - i)$ ,  
und  $C(-1 + i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



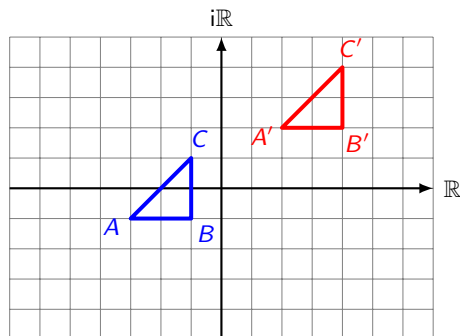
## Aufgabe 5.1

Gegeben:  $f(z) = z + 5 + 3i$  und die Punkte  $A(-3 - i)$ ,  $B(-1 - i)$ ,  
und  $C(-1 + i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



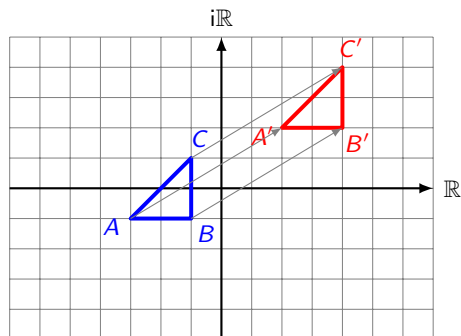
## Aufgabe 5.1

Gegeben:  $f(z) = z + 5 + 3i$  und die Punkte  $A(-3 - i)$ ,  $B(-1 - i)$ ,  
und  $C(-1 + i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



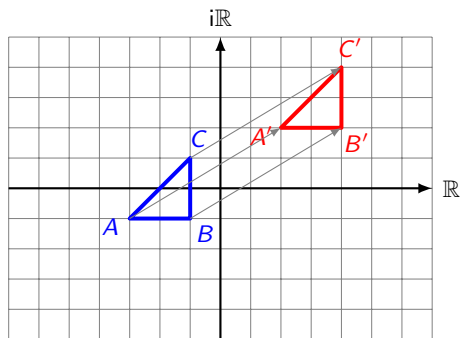
## Aufgabe 5.1

Gegeben:  $f(z) = z + 5 + 3i$  und die Punkte  $A(-3 - i)$ ,  $B(-1 - i)$ ,  
und  $C(-1 + i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



## Aufgabe 5.1

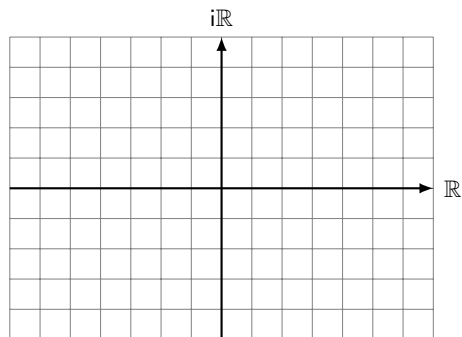
Gegeben:  $f(z) = z + 5 + 3i$  und die Punkte  $A(-3 - i)$ ,  $B(-1 - i)$ ,  
und  $C(-1 + i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



Translation mit Vektor  $\vec{v} = (5, 3)^T$

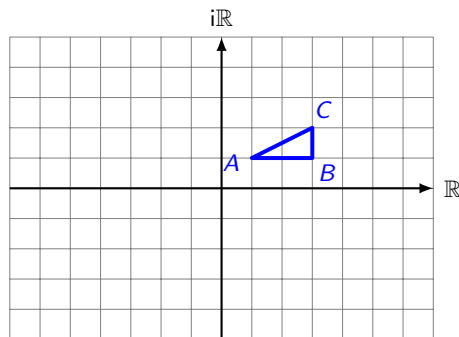
## Aufgabe 5.2

Gegeben:  $f(z) = -2z$  und die Punkte  $A(1 + i)$ ,  $B(3 + i)$ , und  $C(3 + 2i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



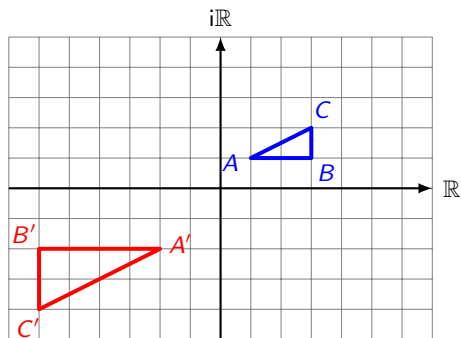
## Aufgabe 5.2

Gegeben:  $f(z) = -2z$  und die Punkte  $A(1 + i)$ ,  $B(3 + i)$ , und  $C(3 + 2i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



## Aufgabe 5.2

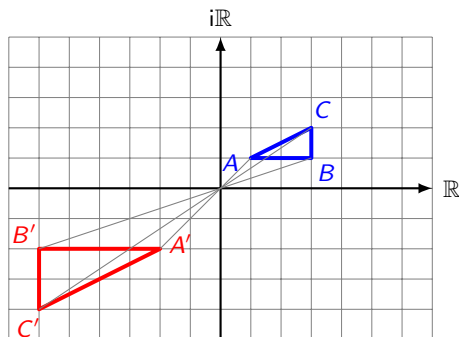
Gegeben:  $f(z) = -2z$  und die Punkte  $A(1 + i)$ ,  $B(3 + i)$ , und  $C(3 + 2i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.





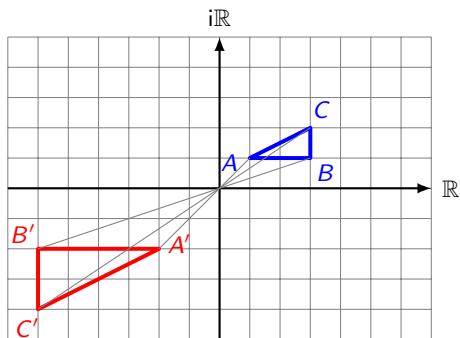
## Aufgabe 5.2

Gegeben:  $f(z) = -2z$  und die Punkte  $A(1 + i)$ ,  $B(3 + i)$ , und  $C(3 + 2i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



## Aufgabe 5.2

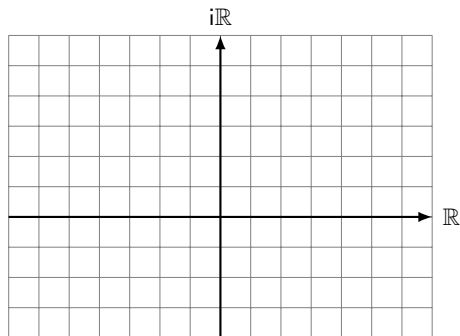
Gegeben:  $f(z) = -2z$  und die Punkte  $A(1 + i)$ ,  $B(3 + i)$ , und  $C(3 + 2i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



zentrische Streckung mit Zentrum  $Z(O)$  und Faktor  $-2$

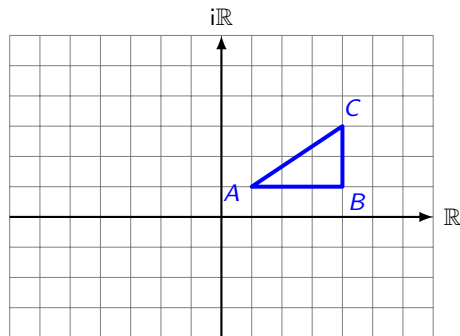
## Aufgabe 5.3

Gegeben:  $f(z) = iz$  sowie  $A(1 + i)$ ,  $B(4 + i)$ , und  $C(4 + 3i)$ .  
Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



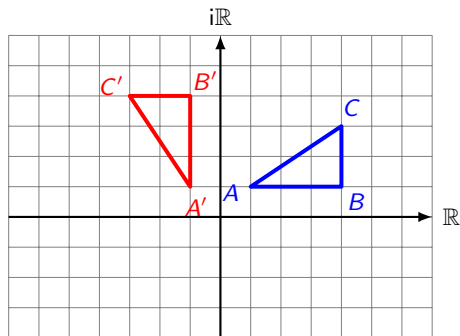
## Aufgabe 5.3

Gegeben:  $f(z) = iz$  sowie  $A(1 + i)$ ,  $B(4 + i)$ , und  $C(4 + 3i)$ .  
Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



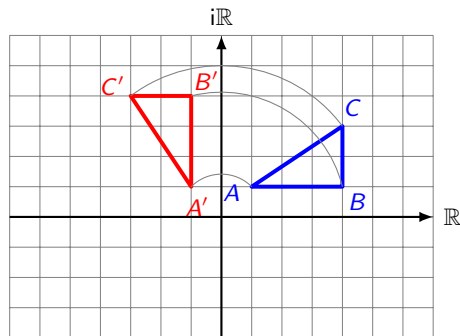
## Aufgabe 5.3

Gegeben:  $f(z) = iz$  sowie  $A(1 + i)$ ,  $B(4 + i)$ , und  $C(4 + 3i)$ .  
Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



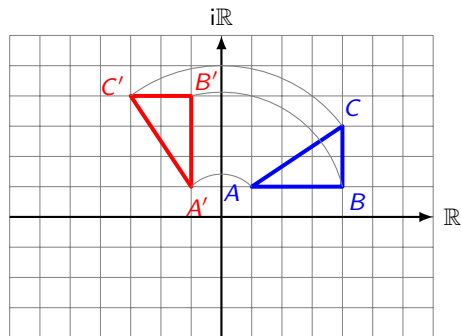
## Aufgabe 5.3

Gegeben:  $f(z) = iz$  sowie  $A(1 + i)$ ,  $B(4 + i)$ , und  $C(4 + 3i)$ .  
Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



## Aufgabe 5.3

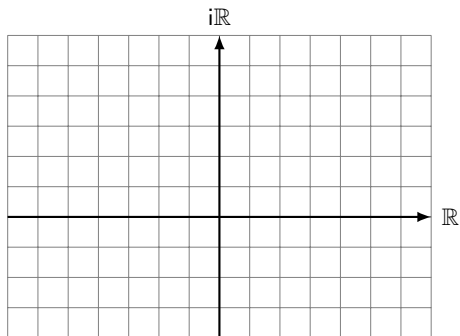
Gegeben:  $f(z) = iz$  sowie  $A(1 + i)$ ,  $B(4 + i)$ , und  $C(4 + 3i)$ .  
Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



Drehung mit Zentrum  $Z(O)$  und Winkel  $\alpha = 90^\circ$

## Aufgabe 5.4

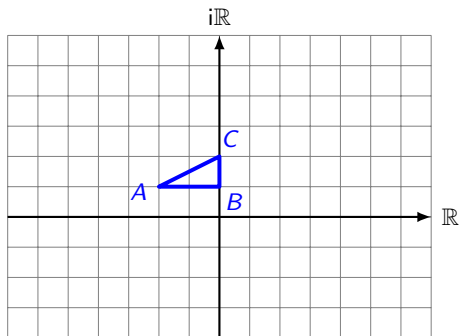
Gegeben:  $f(z) = -2iz$  sowie  $A(-2 + i)$ ,  $B(i)$ , und  $C(2i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.





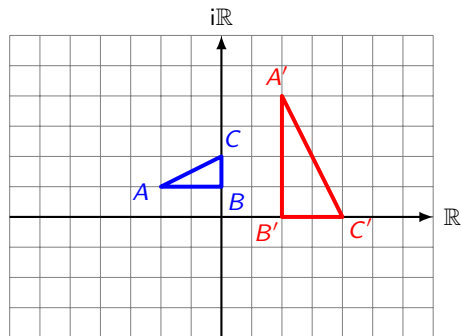
## Aufgabe 5.4

Gegeben:  $f(z) = -2iz$  sowie  $A(-2 + i)$ ,  $B(i)$ , und  $C(2i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



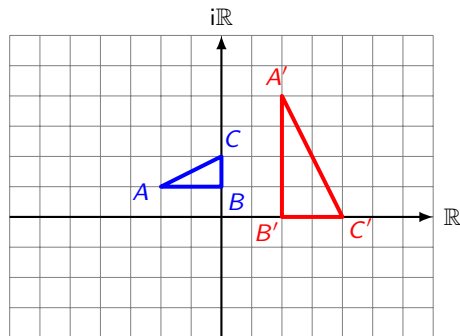
## Aufgabe 5.4

Gegeben:  $f(z) = -2iz$  sowie  $A(-2 + i)$ ,  $B(i)$ , und  $C(2i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



## Aufgabe 5.4

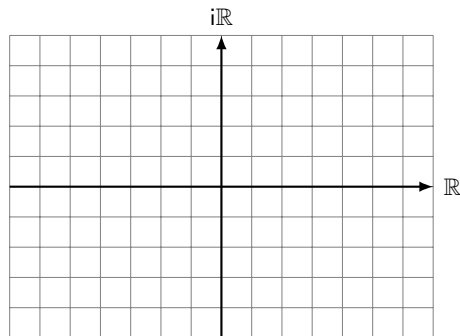
Gegeben:  $f(z) = -2iz$  sowie  $A(-2 + i)$ ,  $B(i)$ , und  $C(2i)$ . Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



Drehstreckung mit Zentrum  $Z(O)$ , Faktor 2 und Winkel  $\alpha = -90^\circ$

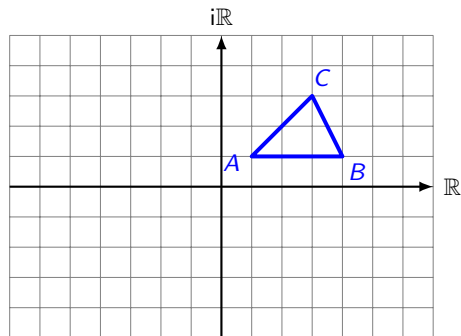
## Aufgabe 5.5

Gegeben:  $f(z) = \bar{z}$  sowie  $A(1 + i)$ ,  $B(4 + i)$ , und  $C(3 + 3i)$ .  
Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



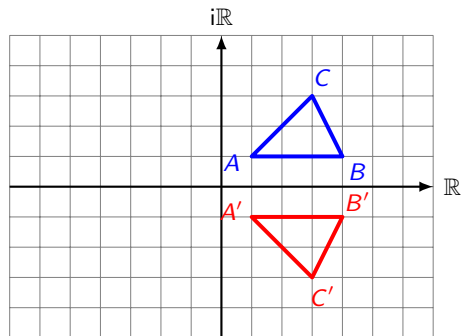
## Aufgabe 5.5

Gegeben:  $f(z) = \bar{z}$  sowie  $A(1 + i)$ ,  $B(4 + i)$ , und  $C(3 + 3i)$ .  
Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



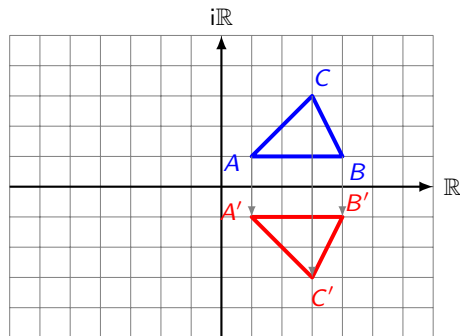
## Aufgabe 5.5

Gegeben:  $f(z) = \bar{z}$  sowie  $A(1 + i)$ ,  $B(4 + i)$ , und  $C(3 + 3i)$ .  
Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



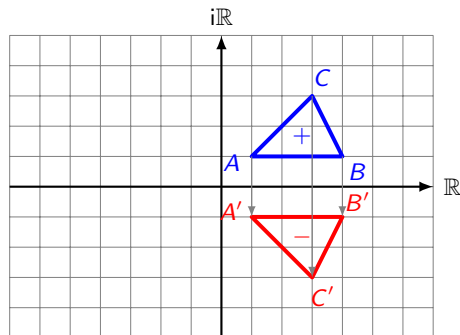
## Aufgabe 5.5

Gegeben:  $f(z) = \bar{z}$  sowie  $A(1 + i)$ ,  $B(4 + i)$ , und  $C(3 + 3i)$ .  
Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



## Aufgabe 5.5

Gegeben:  $f(z) = \bar{z}$  sowie  $A(1 + i)$ ,  $B(4 + i)$ , und  $C(3 + 3i)$ .  
Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



Geradenspiegelung an der reellen Achse



## Die Funktion

$$w = f(z) = az + b$$

mit  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , die einer komplexen Zahl  $z$  die komplexe Zahl  $w$  zuordnet, nennt man eine **lineare Funktion**.

$$f(z) = a \cdot z + b$$

$$f(z) = a \cdot z + b$$

$$= |a| \cdot e^{i\alpha} \cdot |z| \cdot e^{i\varphi} + b$$

$$f(z) = a \cdot z + b$$

$$= |a| \cdot e^{i\alpha} \cdot |z| \cdot e^{i\varphi} + b$$

$$= \underbrace{|a| \cdot |z|}_{\text{zentr. Str. an O}} \cdot e^{i \overbrace{(\alpha + \varphi)}^{\text{Drehung um O}}} + \underbrace{b}_{\text{Translation}}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= a \cdot z + b \\ &= |a| \cdot e^{i\alpha} \cdot |z| \cdot e^{i\varphi} + b \\ &= \underbrace{|a| \cdot |z|}_{\text{zentr. Str. an } 0} \cdot e^{i \overbrace{(\alpha + \varphi)}^{\text{Drehung um } 0}} + \underbrace{b}_{\text{Translation}} \end{aligned}$$

Die Funktion  $f(z) = az + b$  beschreibt eine Drehstreckung am Zentrum  $Z(0)$  mit Faktor  $|a|$  und Winkel  $\alpha$  sowie einer anschließenden Translation um  $b$ .

Dies ist eine **gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung**.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= a \cdot z + b \\
 &= |a| \cdot e^{i\alpha} \cdot |z| \cdot e^{i\varphi} + b \\
 &= \underbrace{|a| \cdot |z|}_{\text{zentr. Str. an } 0} \cdot e^{i \overbrace{(\alpha + \varphi)}^{\text{Drehung um } 0}} + \underbrace{b}_{\text{Translation}}
 \end{aligned}$$

Die Funktion  $f(z) = az + b$  beschreibt eine Drehstreckung am Zentrum  $Z(0)$  mit Faktor  $|a|$  und Winkel  $\alpha$  sowie einer anschließenden Translation um  $b$ .

Dies ist eine **gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung**.

Im Falle von  $f(z) = a\bar{z} + b$  ist der oben beschriebenen Abbildung noch eine Geradenspiegelung an der reellen Achse vorgeschaltet und entspricht somit einer **ungleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung**.

# Spezialfälle

▶  $a = 1$ :

## Spezialfälle

▶  $a = 1$ :

reine Translation um  $b$  (Kongruenzabbildung)



# Spezialfälle

▶  $a = 1$ :

reine Translation um  $b$  (Kongruenzabbildung)

▶  $|a| = 1, b = 0$ :

## Spezialfälle

▶  $a = 1$ :

reine Translation um  $b$  (Kongruenzabbildung)

▶  $|a| = 1, b = 0$ :

reine Drehung um  $O$  (Kongruenzabbildung)

## Spezialfälle

▶  $a = 1$ :

reine Translation um  $b$  (Kongruenzabbildung)

▶  $|a| = 1, b = 0$ :

reine Drehung um  $O$  (Kongruenzabbildung)

▶  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b = 0$ :

## Spezialfälle

▶  $a = 1$ :

reine Translation um  $b$  (Kongruenzabbildung)

▶  $|a| = 1, b = 0$ :

reine Drehung um  $O$  (Kongruenzabbildung)

▶  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b = 0$ :

reine zentrische Streckung an  $O$

## Fixpunkte von $f$

Zu jeder komplexen linearen Funktion  $f(z) = az + b$  mit  $a \neq 1$  lässt sich ein Fixpunkt  $z_0$ , d. h. ein Punkt mit der Eigenschaft  $f(z_0) = z_0$  finden.

## Fixpunkte von $f$

Zu jeder komplexen linearen Funktion  $f(z) = az + b$  mit  $a \neq 1$  lässt sich ein Fixpunkt  $z_0$ , d. h. ein Punkt mit der Eigenschaft  $f(z_0) = z_0$  finden.

$$f(z_0) = z_0$$

## Fixpunkte von $f$

Zu jeder komplexen linearen Funktion  $f(z) = az + b$  mit  $a \neq 1$  lässt sich ein Fixpunkt  $z_0$ , d. h. ein Punkt mit der Eigenschaft  $f(z_0) = z_0$  finden.

$$f(z_0) = z_0$$

$$az_0 + b = z_0$$

## Fixpunkte von $f$

Zu jeder komplexen linearen Funktion  $f(z) = az + b$  mit  $a \neq 1$  lässt sich ein Fixpunkt  $z_0$ , d. h. ein Punkt mit der Eigenschaft  $f(z_0) = z_0$  finden.

$$f(z_0) = z_0$$

$$az_0 + b = z_0$$

$$(1 - a)z_0 = b$$



## Fixpunkte von $f$

Zu jeder komplexen linearen Funktion  $f(z) = az + b$  mit  $a \neq 1$  lässt sich ein Fixpunkt  $z_0$ , d. h. ein Punkt mit der Eigenschaft  $f(z_0) = z_0$  finden.

$$f(z_0) = z_0$$

$$az_0 + b = z_0$$

$$(1 - a)z_0 = b$$

$$z_0 = \frac{b}{1 - a}$$

## Aufgabe 5.6

Gesucht: Fixpunkt  $z_0$  von  $f(z) = (1 + i)z + 3 - 2i$ .

$$(1 + i)z_0 + 3 - 2i = z_0$$

## Aufgabe 5.6

Gesucht: Fixpunkt  $z_0$  von  $f(z) = (1 + i)z + 3 - 2i$ .

$$(1 + i)z_0 + 3 - 2i = z_0$$

$$(1 + i)z_0 - z_0 = -3 + 2i$$

## Aufgabe 5.6

Gesucht: Fixpunkt  $z_0$  von  $f(z) = (1 + i)z + 3 - 2i$ .

$$(1 + i)z_0 + 3 - 2i = z_0$$

$$(1 + i)z_0 - z_0 = -3 + 2i$$

$$z_0[(1 + i) - 1] = -3 + 2i$$

## Aufgabe 5.6

Gesucht: Fixpunkt  $z_0$  von  $f(z) = (1 + i)z + 3 - 2i$ .

$$(1 + i)z_0 + 3 - 2i = z_0$$

$$(1 + i)z_0 - z_0 = -3 + 2i$$

$$z_0[(1 + i) - 1] = -3 + 2i$$

$$z_0i = -3 + 2i$$

## Aufgabe 5.6

Gesucht: Fixpunkt  $z_0$  von  $f(z) = (1 + i)z + 3 - 2i$ .

$$(1 + i)z_0 + 3 - 2i = z_0$$

$$(1 + i)z_0 - z_0 = -3 + 2i$$

$$z_0[(1 + i) - 1] = -3 + 2i$$

$$z_0i = -3 + 2i$$

$$z_0 = 2 + 3i$$

## Aufgabe 5.6

Gesucht: Fixpunkt  $z_0$  von  $f(z) = (1 + i)z + 3 - 2i$ .

$$(1 + i)z_0 + 3 - 2i = z_0$$

$$(1 + i)z_0 - z_0 = -3 + 2i$$

$$z_0[(1 + i) - 1] = -3 + 2i$$

$$z_0i = -3 + 2i$$

$$z_0 = 2 + 3i$$

$f(x)$  kann als Drehstreckung mit dem Zentrum  $z_0 = 2 + 3i$  und dem (bisherigen) Drehwinkel  $\alpha = \arg(1 + i)$  ausgedrückt werden.

Formal:  $f(z) = (1 + i)[z - (2 + 3i)] + (2 + 3i)$

# Geraden

Die folgende Darstellungen von Geraden in  $\mathbb{R}^2$  sollten bereits bekannt sein:

►  $y = mx + q$     Normalform



# Geraden

Die folgenden Darstellungen von Geraden in  $\mathbb{R}^2$  sollten bereits bekannt sein:

▶  $y = mx + q$     Normalform

▶  $Ax + By + C = 0$     Koordinatenform

## Geraden

Die folgende Darstellungen von Geraden in  $\mathbb{R}^2$  sollten bereits bekannt sein:

▶  $y = mx + q$     Normalform

▶  $Ax + By + C = 0$     Koordinatenform

▶  $g: \vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$     Parameterform

## Geraden

Die folgenden Darstellungen von Geraden in  $\mathbb{R}^2$  sollten bereits bekannt sein:

- ▶  $y = mx + q$     Normalform
- ▶  $Ax + By + C = 0$     Koordinatenform
- ▶  $g: \vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$     Parameterform

Aus der letzten Darstellung erhält man die **Parameterdarstellung** für Geraden in  $\mathbb{C}$ :

## Geraden

Die folgenden Darstellungen von Geraden in  $\mathbb{R}^2$  sollten bereits bekannt sein:

- ▶  $y = mx + q$     Normalform
- ▶  $Ax + By + C = 0$     Koordinatenform
- ▶  $g: \vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$     Parameterform

Aus der letzten Darstellung erhält man die **Parameterdarstellung** für Geraden in  $\mathbb{C}$ :

$$z = a + t \cdot v \text{ mit } a, v \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$$

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Ansatz:  $z = x + iy$

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Ansatz:  $z = x + iy$

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Ansatz:  $z = x + iy$

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

$$A \cdot \operatorname{Re}(z) + B \cdot \operatorname{Im}(z) + C = 0$$



Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Ansatz:  $z = x + iy$

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

$$A \cdot \operatorname{Re}(z) + B \cdot \operatorname{Im}(z) + C = 0 \quad (\text{FBT S. 19})$$

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Ansatz:  $z = x + iy$

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

$$A \cdot \operatorname{Re}(z) + B \cdot \operatorname{Im}(z) + C = 0 \quad (\text{FBT S. 19})$$

$$A \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + B \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} + C = 0$$

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Ansatz:  $z = x + iy$

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

$$A \cdot \operatorname{Re}(z) + B \cdot \operatorname{Im}(z) + C = 0 \quad (\text{FBT S. 19})$$

$$A \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + B \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} + C = 0 \quad \parallel \cdot 2[i^4]$$

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Ansatz:  $z = x + iy$

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

$$A \cdot \operatorname{Re}(z) + B \cdot \operatorname{Im}(z) + C = 0 \quad (\text{FBT S. 19})$$

$$A \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + B \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} + C = 0 \quad \|\cdot 2[i^4]$$

$$Az + A\bar{z} - Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0$$

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Ansatz:  $z = x + iy$

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

$$A \cdot \operatorname{Re}(z) + B \cdot \operatorname{Im}(z) + C = 0 \quad (\text{FBT S. 19})$$

$$A \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + B \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} + C = 0 \quad \|\cdot 2[i^4]$$

$$Az + A\bar{z} - Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0$$

$$(A - Bi)z + (A + Bi)\bar{z} + 2C = 0$$

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Ansatz:  $z = x + iy$

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

$$A \cdot \operatorname{Re}(z) + B \cdot \operatorname{Im}(z) + C = 0 \quad (\text{FBT S. 19})$$

$$A \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + B \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} + C = 0 \quad \|\cdot 2[i^4]$$

$$Az + A\bar{z} - Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0$$

$$(A - Bi)z + (A + Bi)\bar{z} + 2C = 0$$

$$\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in  $\mathbb{C}$  herleiten:

Ansatz:  $z = x + iy$

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

$$A \cdot \operatorname{Re}(z) + B \cdot \operatorname{Im}(z) + C = 0 \quad (\text{FBT S. 19})$$

$$A \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + B \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} + C = 0 \quad \|\cdot 2[i^4]$$

$$Az + A\bar{z} - Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0$$

$$(A - Bi)z + (A + Bi)\bar{z} + 2C = 0$$

$$\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

wobei  $b = A + Bi \in \mathbb{C}$  und  $c = 2C \in \mathbb{R}$

Daraus folgt: Die Gleichung



Daraus folgt: Die Gleichung

$$\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0, \text{ mit } b \in \mathbb{C}, b \neq 0, c \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt: Die Gleichung

$$\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0, \text{ mit } b \in \mathbb{C}, b \neq 0, c \in \mathbb{R}$$

stellt in der komplexen Zahlenebene eine Gerade dar.

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0$$

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow$$

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$$

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$   
 $-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$
- ▶ Geraden parallel zur imaginären Achse:



## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$$

- ▶ Geraden parallel zur imaginären Achse:  $(Ax + C = 0)$

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$$

- ▶ Geraden parallel zur imaginären Achse:  $(Ax + C = 0)$

$$Az + A\bar{z} + 2C = 0$$

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$$

- ▶ Geraden parallel zur imaginären Achse:  $(Ax + C = 0)$

$$Az + A\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow$$

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$$

- ▶ Geraden parallel zur imaginären Achse:  $(Ax + C = 0)$

$$Az + A\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z + \bar{z} + c = 0$$

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$$

- ▶ Geraden parallel zur imaginären Achse:  $(Ax + C = 0)$

$$Az + A\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z + \bar{z} + c = 0$$

- ▶ Ursprungsgeraden:

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$$

- ▶ Geraden parallel zur imaginären Achse:  $(Ax + C = 0)$

$$Az + A\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z + \bar{z} + c = 0$$

- ▶ Ursprungsgeraden:  $(Ax + By = 0)$

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$$

- ▶ Geraden parallel zur imaginären Achse:  $(Ax + C = 0)$

$$Az + A\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z + \bar{z} + c = 0$$

- ▶ Ursprungsgeraden:  $(Ax + By = 0)$

$$(A - Bi)z + (A + Bi)\bar{z} = 0$$

## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$$

- ▶ Geraden parallel zur imaginären Achse:  $(Ax + C = 0)$

$$Az + A\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z + \bar{z} + c = 0$$

- ▶ Ursprungsgeraden:  $(Ax + By = 0)$

$$(A - Bi)z + (A + Bi)\bar{z} = 0 \quad \Leftrightarrow$$



## Spezialfälle

- ▶ Geraden parallel zur reellen Achse:  $(By + C = 0)$

$$-Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -iz + i\bar{z} + c = 0$$

- ▶ Geraden parallel zur imaginären Achse:  $(Ax + C = 0)$

$$Az + A\bar{z} + 2C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z + \bar{z} + c = 0$$

- ▶ Ursprungsgeraden:  $(Ax + By = 0)$

$$(A - Bi)z + (A + Bi)\bar{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{b}z + b\bar{z} = 0$$

## Aufgabe 5.7

Stelle die Gerade  $g: y = -2x + 3$  in der komplexen Form  $\overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$  dar.

## Aufgabe 5.7

Stelle die Gerade  $g: y = -2x + 3$  in der komplexen Form  $\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$  dar.

Ansatz:  $z = x + iy$  mit  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$

## Aufgabe 5.7

Stelle die Gerade  $g: y = -2x + 3$  in der komplexen Form  $\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$  dar.

Ansatz:  $z = x + iy$  mit  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$

$$2x + y - 3 = 0$$

## Aufgabe 5.7

Stelle die Gerade  $g: y = -2x + 3$  in der komplexen Form  $\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$  dar.

Ansatz:  $z = x + iy$  mit  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$

$$2x + y - 3 = 0$$

$$2 \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) - 3 = 0$$

## Aufgabe 5.7

Stelle die Gerade  $g: y = -2x + 3$  in der komplexen Form  $\overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$  dar.

Ansatz:  $z = x + iy$  mit  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$

$$2x + y - 3 = 0$$

$$2 \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) - 3 = 0$$

$$2 \cdot \frac{z + \overline{z}}{2} + \frac{z - \overline{z}}{2i} - 3 = 0$$

## Aufgabe 5.7

Stelle die Gerade  $g: y = -2x + 3$  in der komplexen Form  $\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$  dar.

Ansatz:  $z = x + iy$  mit  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$

$$2x + y - 3 = 0$$

$$2 \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) - 3 = 0$$

$$2 \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{z - \bar{z}}{2i} - 3 = 0$$

## Aufgabe 5.7

Stelle die Gerade  $g: y = -2x + 3$  in der komplexen Form  $\overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$  dar.

Ansatz:  $z = x + iy$  mit  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$

$$2x + y - 3 = 0$$

$$2 \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) - 3 = 0$$

$$2 \cdot \frac{z + \overline{z}}{2} + \frac{z - \overline{z}}{2i} - 3 = 0$$

$$2i(z + \overline{z}) - i(z - \overline{z}) - 6 = 0$$



## Aufgabe 5.7

Stelle die Gerade  $g: y = -2x + 3$  in der komplexen Form  $\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$  dar.

Ansatz:  $z = x + iy$  mit  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$

$$2x + y - 3 = 0$$

$$2 \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) - 3 = 0$$

$$2 \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{z - \bar{z}}{2i} - 3 = 0$$

$$2i(z + \bar{z}) - i(z - \bar{z}) - 6 = 0$$

$$(2 - i)z + (2 + i)\bar{z} - 6 = 0 \quad \text{oder: } b = A + Bi, \bar{b} = A - Bi, c = 2C$$

## Aufgabe 5.8

Stelle  $g: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 1 = 0$  in der reellen Koordinatenform  $Ax + By + C = 0$  dar.

## Aufgabe 5.8

Stelle  $g: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 1 = 0$  in der reellen Koordinatenform  $Ax + By + C = 0$  dar.

Es genügt,  $z = x + iy$  einzusetzen:

## Aufgabe 5.8

Stelle  $g: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 1 = 0$  in der reellen Koordinatenform  $Ax + By + C = 0$  dar.

Es genügt,  $z = x + iy$  einzusetzen:

$$(1 + i)(x + yi) + (1 - i)(x - yi) + 1 = 0$$

## Aufgabe 5.8

Stelle  $g: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 1 = 0$  in der reellen Koordinatenform  $Ax + By + C = 0$  dar.

Es genügt,  $z = x + iy$  einzusetzen:

$$(1 + i)(x + yi) + (1 - i)(x - yi) + 1 = 0$$

$$x - y + xi + yi + x - y - xi - yi + 1 = 0$$

## Aufgabe 5.8

Stelle  $g: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 1 = 0$  in der reellen Koordinatenform  $Ax + By + C = 0$  dar.

Es genügt,  $z = x + iy$  einzusetzen:

$$(1 + i)(x + yi) + (1 - i)(x - yi) + 1 = 0$$

$$x - y + xi + yi + x - y - xi - yi + 1 = 0$$

$$2x - 2y + 1 = 0$$

## Aufgabe 5.8

Stelle  $g$ :  $(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 1 = 0$  in der reellen Koordinatenform  $Ax + By + C = 0$  dar.

Es genügt,  $z = x + iy$  einzusetzen:

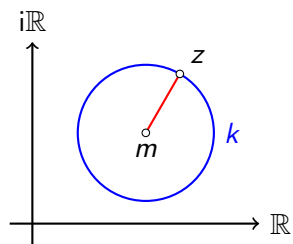
$$(1 + i)(x + yi) + (1 - i)(x - yi) + 1 = 0$$

$$x - y + xi + yi + x - y - xi - yi + 1 = 0$$

$$2x - 2y + 1 = 0$$

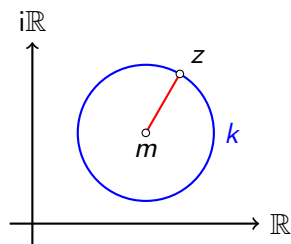
*Bemerkung:* Bei einer gültigen komplexen Koordinatenform müssen die imaginären Anteile nach dem Einsetzen verschwinden.

# Die Betragsform der Kreisgleichung



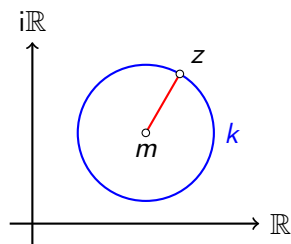


## Die Betragsform der Kreisgleichung



Ein **Kreis** mit dem Mittelpunkt  $m \in \mathbb{C}$  und dem Radius  $r \in \mathbb{R}^+$  hat die Gleichung

# Die Betragsform der Kreisgleichung



Ein **Kreis** mit dem Mittelpunkt  $m \in \mathbb{C}$  und dem Radius  $r \in \mathbb{R}^+$  hat die Gleichung

$$k: |z - m| = r \quad (z \in \mathbb{C}) \quad \text{Betragsform}$$

Aus der Betragsform der Kreisgleichung folgt:

$$|z - m| = r$$

Aus der Betragsform der Kreisgleichung folgt:

$$|z - m| = r$$

$$|z - m|^2 = r^2$$

Aus der Betragsform der Kreisgleichung folgt:

$$|z - m| = r$$

$$|z - m|^2 = r^2$$

$$(z - m)\overline{(z - m)} = r^2$$

Aus der Betragsform der Kreisgleichung folgt:

$$|z - m| = r$$

$$|z - m|^2 = r^2$$

$$(z - m)\overline{(z - m)} = r^2$$

$$(z - m)(\bar{z} - \bar{m}) = r^2$$

Aus der Betragsform der Kreisgleichung folgt:

$$|z - m| = r$$

$$|z - m|^2 = r^2$$

$$(z - m)\overline{(z - m)} = r^2$$

$$(z - m)(\bar{z} - \bar{m}) = r^2$$

$$z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + \underbrace{m\bar{m} - r^2}_c = 0$$

## Die betragsfreie Form der Kreisgleichung

Aus  $|m - z| = r$  erhält man mit  $c = m\bar{m} - r^2 \in \mathbb{R}$  die **betragsfreie Form** der Kreisgleichung:



## Die betragsfreie Form der Kreisgleichung

Aus  $|m - z| = r$  erhält man mit  $c = m\bar{m} - r^2 \in \mathbb{R}$  die **betragsfreie Form** der Kreisgleichung:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

## Aufgabe 5.9

Stelle den Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $m = i$  und Radius  $r = 4$  in der Betragsform und in der betragsfreien Form dar.

## Aufgabe 5.9

Stelle den Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $m = i$  und Radius  $r = 4$  in der Betragsform und in der betragsfreien Form dar.

$$|z - i| = 4 \quad (\text{Betragsform})$$

## Aufgabe 5.9

Stelle den Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $m = i$  und Radius  $r = 4$  in der Betragsform und in der betragsfreien Form dar.

$$|z - i| = 4 \quad (\text{Betragsform})$$

$$-\bar{m} = i$$

## Aufgabe 5.9

Stelle den Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $m = i$  und Radius  $r = 4$  in der Betragsform und in der betragsfreien Form dar.

$$|z - i| = 4 \quad (\text{Betragsform})$$

$$-\bar{m} = i$$

$$-m = -i$$

## Aufgabe 5.9

Stelle den Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $m = i$  und Radius  $r = 4$  in der Betragsform und in der betragsfreien Form dar.

$$|z - i| = 4 \quad (\text{Betragsform})$$

$$-\bar{m} = i$$

$$-m = -i$$

$$c = m\bar{m} - r^2 = -i^2 - 16 = 1 - 16 = -15$$

## Aufgabe 5.9

Stelle den Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $m = i$  und Radius  $r = 4$  in der Betragsform und in der betragsfreien Form dar.

$$|z - i| = 4 \quad (\text{Betragsform})$$

$$-\bar{m} = i$$

$$-m = -i$$

$$c = m\bar{m} - r^2 = -i^2 - 16 = 1 - 16 = -15$$

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 15 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

## Aufgabe 5.10

Welche Bedingung muss für  $c \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{C}$  erfüllt sein, damit die betragsfreie Form der Kreisgleichung tatsächlich einen Kreis beschreibt?



## Aufgabe 5.10

Welche Bedingung muss für  $c \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{C}$  erfüllt sein, damit die betragsfreie Form der Kreisgleichung tatsächlich einen Kreis beschreibt?

$$c = m\bar{m} - r^2$$

## Aufgabe 5.10

Welche Bedingung muss für  $c \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{C}$  erfüllt sein, damit die betragsfreie Form der Kreisgleichung tatsächlich einen Kreis beschreibt?

$$c = m\bar{m} - r^2$$

$$m\bar{m} - c = r^2 > 0$$

## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

Koeffizientenvergleich mit:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

Koeffizientenvergleich mit:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

$$-m = -i$$

## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

Koeffizientenvergleich mit:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

$$-m = -i \quad \Rightarrow \quad m = i$$

## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

Koeffizientenvergleich mit:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

$$-m = -i \quad \Rightarrow \quad m = i$$

$$c = m\bar{m} - r^2$$

## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

Koeffizientenvergleich mit:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

$$-m = -i \quad \Rightarrow \quad m = i$$

$$c = m\bar{m} - r^2$$

$$r^2 = m\bar{m} - c$$



## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

Koeffizientenvergleich mit:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

$$-m = -i \quad \Rightarrow \quad m = i$$

$$c = m\bar{m} - r^2$$

$$r^2 = m\bar{m} - c$$

$$r^2 = i \cdot \bar{i} - (-1)$$

## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

Koeffizientenvergleich mit:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

$$-m = -i \quad \Rightarrow \quad m = i$$

$$c = m\bar{m} - r^2$$

$$r^2 = m\bar{m} - c$$

$$r^2 = i \cdot \bar{i} - (-1) = i \cdot (-i) + 1$$

## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

Koeffizientenvergleich mit:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

$$-m = -i \quad \Rightarrow \quad m = i$$

$$c = m\bar{m} - r^2$$

$$r^2 = m\bar{m} - c$$

$$r^2 = i \cdot \bar{i} - (-1) = i \cdot (-i) + 1 = 1 + 1$$

## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

Koeffizientenvergleich mit:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

$$-m = -i \quad \Rightarrow \quad m = i$$

$$c = m\bar{m} - r^2$$

$$r^2 = m\bar{m} - c$$

$$r^2 = i \cdot \bar{i} - (-1) = i \cdot (-i) + 1 = 1 + 1 = 2$$

## Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises

$$k: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 = 0?$$

Koeffizientenvergleich mit:

$$k: z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$$

$$-m = -i \quad \Rightarrow \quad m = i$$

$$c = m\bar{m} - r^2$$

$$r^2 = m\bar{m} - c$$

$$r^2 = i \cdot \bar{i} - (-1) = i \cdot (-i) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$r = \sqrt{2}$$

Die **Parameterdarstellung** für einen Kreis kann auf die komplexe Zahlenebene übertragen werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Die **Parameterdarstellung** für einen Kreis kann auf die komplexe Zahlenebene übertragen werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$z = m + r \operatorname{cis} \varphi = m + re^{i\varphi}$$

Eine **Kurve** ist die Menge  $K$  aller Punkte  $z \in \mathbb{C}$ , die eine Gleichung  $G(z) = 0$  erfüllen.



Eine **Kurve** ist die Menge  $K$  aller Punkte  $z \in \mathbb{C}$ , die eine Gleichung  $G(z) = 0$  erfüllen.

*Beispiele:*

$$\blacktriangleright \underbrace{(3 - 4i)z + (3 + 4i)\bar{z} + 4}_{G(z)} = 0$$

Eine **Kurve** ist die Menge  $K$  aller Punkte  $z \in \mathbb{C}$ , die eine Gleichung  $G(z) = 0$  erfüllen.

*Beispiele:*

$$\blacktriangleright \underbrace{(3 - 4i)z + (3 + 4i)\bar{z} + 4}_{G(z)} = 0 \quad \text{Gerade}$$

Eine **Kurve** ist die Menge  $K$  aller Punkte  $z \in \mathbb{C}$ , die eine Gleichung  $G(z) = 0$  erfüllen.

*Beispiele:*

$$\blacktriangleright \underbrace{(3 - 4i)z + (3 + 4i)\bar{z} + 4}_{G(z)} = 0 \quad \text{Gerade}$$

$$\blacktriangleright \underbrace{z\bar{z} - (3 - 4i)z - (3 + 4i)\bar{z} + 21}_{G(z)} = 0$$

Eine **Kurve** ist die Menge  $K$  aller Punkte  $z \in \mathbb{C}$ , die eine Gleichung  $G(z) = 0$  erfüllen.

*Beispiele:*

$$\blacktriangleright \underbrace{(3 - 4i)z + (3 + 4i)\bar{z} + 4}_{G(z)} = 0 \quad \text{Gerade}$$

$$\blacktriangleright \underbrace{z\bar{z} - (3 - 4i)z - (3 + 4i)\bar{z} + 21}_{G(z)} = 0 \quad \text{Kreis}$$

## Satz

Es sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe Funktion,  $K$  eine Kurve und  $K'$  ihre Bildkurve. Dann gilt für  $w = f(z)$ :

## Satz

Es sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe Funktion,  $K$  eine Kurve und  $K'$  ihre Bildkurve. Dann gilt für  $w = f(z)$ :

$$w \in K' \iff z \in K \iff G(z) = 0 \iff G(f^{-1}(w)) = 0$$

## Satz

Es sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe Funktion,  $K$  eine Kurve und  $K'$  ihre Bildkurve. Dann gilt für  $w = f(z)$ :

$$w \in K' \iff z \in K \iff G(z) = 0 \iff G(f^{-1}(w)) = 0$$

Man erhält die Gleichung von  $K'$ , indem man in der Gleichung von  $K$  die Variable  $z$  durch  $f^{-1}(w)$  ersetzt.

## Aufgabe 5.12

Kurve:  $K: |z| = 1$ ; Funktion:  $f(z) = 2z + i$



## Aufgabe 5.12

Kurve:  $K: |z| = 1$ ; Funktion:  $f(z) = 2z + i$

$$2z + i = w$$

## Aufgabe 5.12

Kurve:  $K: |z| = 1$ ; Funktion:  $f(z) = 2z + i$

$$2z + i = w \quad \Rightarrow$$

## Aufgabe 5.12

Kurve:  $K: |z| = 1$ ; Funktion:  $f(z) = 2z + i$

$$2z + i = w \quad \Rightarrow \quad z = \frac{w - i}{2} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

## Aufgabe 5.12

Kurve:  $K: |z| = 1$ ; Funktion:  $f(z) = 2z + i$

$$2z + i = w \quad \Rightarrow \quad z = \frac{w - i}{2} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

$$\left| \frac{w - i}{2} \right| = 1$$

## Aufgabe 5.12

Kurve:  $K: |z| = 1$ ; Funktion:  $f(z) = 2z + i$

$$2z + i = w \quad \Rightarrow \quad z = \frac{w - i}{2} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

$$\left| \frac{w - i}{2} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad K': |w - i| = 2$$

## Aufgabe 5.12

Kurve:  $K: |z| = 1$ ; Funktion:  $f(z) = 2z + i$

$$2z + i = w \quad \Rightarrow \quad z = \frac{w - i}{2} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

$$\left| \frac{w - i}{2} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad K': |w - i| = 2$$

Der Kreis mit  $m = 0$  und  $r = 1$  wird auf den Kreis mit  $m' = i$  und  $r' = 2$  abgebildet.

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2$$



## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

$$1/\bar{z} = w$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

$$1/\bar{z} = w \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 1/w$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

$$1/\bar{z} = w \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 1/w \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w}$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

$$1/\bar{z} = w \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 1/w \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

$$1/\bar{z} = w \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 1/w \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

$$\frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{1}{w} - 2 \cdot \frac{1}{\bar{w}} - 2 \cdot \frac{1}{w} - 5 = 0$$



## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

$$1/\bar{z} = w \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 1/w \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

$$\frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{1}{w} - 2 \cdot \frac{1}{\bar{w}} - 2 \cdot \frac{1}{w} - 5 = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

$$1/\bar{z} = w \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 1/w \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

$$\frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{1}{w} - 2 \cdot \frac{1}{w} - 2 \cdot \frac{1}{\bar{w}} - 5 = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

$$1 - 2w - 2\bar{w} - 5w\bar{w} = 0$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

$$1/\bar{z} = w \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 1/w \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

$$\frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{1}{w} - 2 \cdot \frac{1}{w} - 2 \cdot \frac{1}{\bar{w}} - 5 = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

$$1 - 2w - 2\bar{w} - 5w\bar{w} = 0 \quad || \cdot (-0.2)$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

$$1/\bar{z} = w \Rightarrow \bar{z} = 1/w \Rightarrow z = 1/\bar{w} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

$$\frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{1}{w} - 2 \cdot \frac{1}{w} - 2 \cdot \frac{1}{\bar{w}} - 5 = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

$$1 - 2w - 2\bar{w} - 5w\bar{w} = 0 \quad || \cdot (-0.2)$$

$$K': w\bar{w} + 0.4w + 0.4\bar{w} - 0.2 = 0$$

## Aufgabe 5.13

Kurve:  $K: |z - 2| = 3$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$$m = 2, \bar{m} = 2, c = m\bar{m} - r^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 2 - 9 = -5$$

$$K: z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 5 = 0 \quad (\text{betragsfreie Form})$$

$$1/\bar{z} = w \Rightarrow \bar{z} = 1/w \Rightarrow z = 1/\bar{w} \text{ in } K \text{ einsetzen:}$$

$$\frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{1}{w} - 2 \cdot \frac{1}{w} - 2 \cdot \frac{1}{\bar{w}} - 5 = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

$$1 - 2w - 2\bar{w} - 5w\bar{w} = 0 \quad || \cdot (-0.2)$$

$$K': w\bar{w} + 0.4w + 0.4\bar{w} - 0.2 = 0$$

$$\text{Kreis mit } m = -0.4 \text{ und } r = \sqrt{m \cdot \bar{m} - c} = \sqrt{0.16 + 0.2} = 0.6$$

## Aufgabe 5.14

Kurve:  $K: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

## Aufgabe 5.14

Kurve:  $K: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$w = 1/\bar{z} \Leftrightarrow z = 1/\bar{w}$  in  $K$  einsetzen

## Aufgabe 5.14

Kurve:  $K: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$w = 1/\bar{z} \Leftrightarrow z = 1/\bar{w}$  in  $K$  einsetzen

$$(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0 \quad (K: \text{ Ursprungsgerade})$$



## Aufgabe 5.14

Kurve:  $K: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$w = 1/\bar{z} \Leftrightarrow z = 1/\bar{w}$  in  $K$  einsetzen

$$(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0 \quad (K: \text{ Ursprungsgerade})$$

$$(1 + i)\frac{1}{\bar{w}} + (1 - i)\frac{1}{w} = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

## Aufgabe 5.14

Kurve:  $K: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$w = 1/\bar{z} \Leftrightarrow z = 1/\bar{w}$  in  $K$  einsetzen

$$(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0 \quad (K: \text{ Ursprungsgerade})$$

$$(1 + i)\frac{1}{\bar{w}} + (1 - i)\frac{1}{w} = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

$$(1 + i)w + (1 - i)\bar{w} = 0 \quad (K' = K: \text{ Ursprungsgerade})$$

## Aufgabe 5.14

Kurve:  $K: (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$w = 1/\bar{z} \Leftrightarrow z = 1/\bar{w}$  in  $K$  einsetzen

$$(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0 \quad (K: \text{ Ursprungsgerade})$$

$$(1 + i)\frac{1}{\bar{w}} + (1 - i)\frac{1}{w} = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

$$(1 + i)w + (1 - i)\bar{w} = 0 \quad (K' = K: \text{ Ursprungsgerade})$$

$K$  ist eine **Fixgerade** aber **keine Fixpunktgerade** von  $f$ .

## Aufgabe 5.15

Kurve:  $K: (4 + 3i)z + (4 - 3i)\bar{z} + 12 = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

## Aufgabe 5.15

Kurve:  $K: (4 + 3i)z + (4 - 3i)\bar{z} + 12 = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$w = 1/\bar{z} \Leftrightarrow z = 1/\bar{w}$  in  $K$  einsetzen:

## Aufgabe 5.15

Kurve:  $K: (4 + 3i)z + (4 - 3i)\bar{z} + 12 = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$w = 1/\bar{z} \Leftrightarrow z = 1/\bar{w}$  in  $K$  einsetzen:

$$(4 + 3i)\frac{1}{\bar{w}} + (4 - 3i)\frac{1}{w} + 12 = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

## Aufgabe 5.15

Kurve:  $K: (4 + 3i)z + (4 - 3i)\bar{z} + 12 = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$w = 1/\bar{z} \Leftrightarrow z = 1/\bar{w}$  in  $K$  einsetzen:

$$(4 + 3i)\frac{1}{\bar{w}} + (4 - 3i)\frac{1}{w} + 12 = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

$$(4 + 3i)w + (4 - 3i)\bar{w} + 12w\bar{w} = 0 \quad || : 12$$

## Aufgabe 5.15

Kurve:  $K: (4 + 3i)z + (4 - 3i)\bar{z} + 12 = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$w = 1/\bar{z} \Leftrightarrow z = 1/\bar{w}$  in  $K$  einsetzen:

$$(4 + 3i)\frac{1}{\bar{w}} + (4 - 3i)\frac{1}{w} + 12 = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

$$(4 + 3i)w + (4 - 3i)\bar{w} + 12w\bar{w} = 0 \quad || : 12$$

$$w\bar{w} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4}i\right)w - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i\right)\bar{w} = 0$$



## Aufgabe 5.15

Kurve:  $K: (4 + 3i)z + (4 - 3i)\bar{z} + 12 = 0$ ; Funktion:  $f(z) = 1/\bar{z}$

$w = 1/\bar{z} \Leftrightarrow z = 1/\bar{w}$  in  $K$  einsetzen:

$$(4 + 3i)\frac{1}{\bar{w}} + (4 - 3i)\frac{1}{w} + 12 = 0 \quad || \cdot w\bar{w}$$

$$(4 + 3i)w + (4 - 3i)\bar{w} + 12w\bar{w} = 0 \quad || : 12$$

$$w\bar{w} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4}i\right)w - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i\right)\bar{w} = 0$$

Kreis mit  $m = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i$  und  $r = \sqrt{m\bar{m} - c} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16} - 0} = \frac{5}{12}$

Gegeben ist die Funktion  $f(z) = w = 1/\bar{z}$

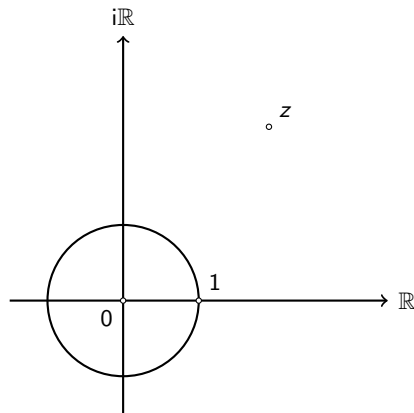
Ist  $z = r \cdot e^{i\varphi}$ , so gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r \cdot e^{i\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{e^{i\varphi}} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{e^{-i\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{i\varphi} = w \end{aligned}$$

Also ist  $|w| = \frac{1}{|z|}$  und  $\arg(w) = \arg(z)$

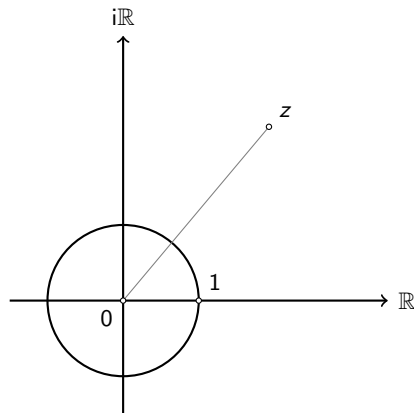
## Geometrische Deutung

$f(z) = w = 1/\bar{z}$  stellt eine Spiegelung von  $z$  am Einheitskreis dar.



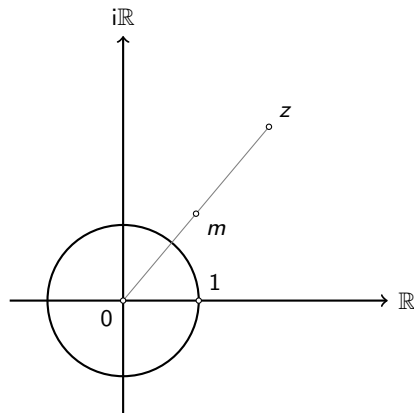
## Geometrische Deutung

$f(z) = w = 1/\bar{z}$  stellt eine Spiegelung von  $z$  am Einheitskreis dar.



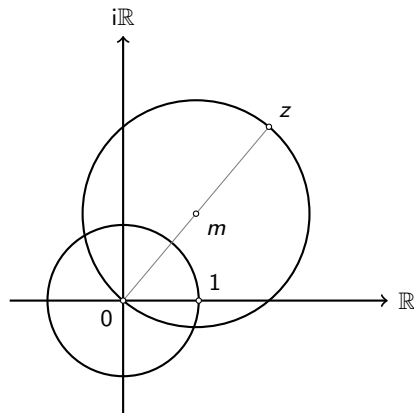
## Geometrische Deutung

$f(z) = w = 1/\bar{z}$  stellt eine Spiegelung von  $z$  am Einheitskreis dar.



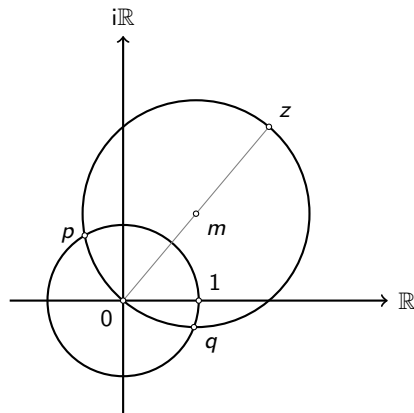
## Geometrische Deutung

$f(z) = w = 1/\bar{z}$  stellt eine Spiegelung von  $z$  am Einheitskreis dar.



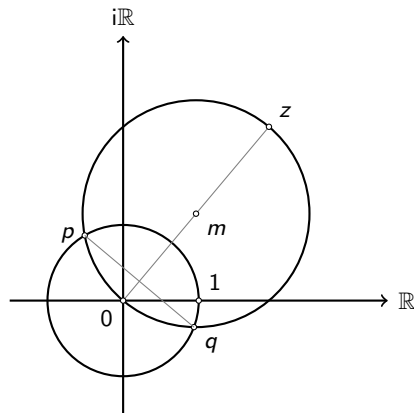
## Geometrische Deutung

$f(z) = w = 1/\bar{z}$  stellt eine Spiegelung von  $z$  am Einheitskreis dar.



## Geometrische Deutung

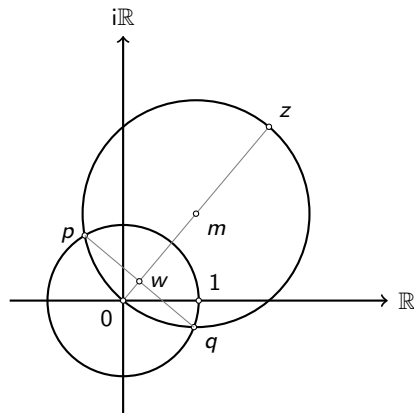
$f(z) = w = 1/\bar{z}$  stellt eine Spiegelung von  $z$  am Einheitskreis dar.





## Geometrische Deutung

$f(z) = w = 1/\bar{z}$  stellt eine Spiegelung von  $z$  am Einheitskreis dar.





## Konstruktion (für $|z| > 1$ )

1. Kreis( $M = 0, r = 1$ )  $\rightarrow k_E$  (Einheitskreis)
2. Mittelpunkt( $0, z$ )  $\rightarrow m$
3. Kreis( $M = m, r = |z|/2$ )  $\rightarrow k_T$  (Thaleskreis über  $0z$ )
4.  $k_E \cap k_T \rightarrow \{p, q\}$
5.  $pq \cap 0z \rightarrow w$

## Berechnung

Das Dreieck  $Ozp$  ist rechtwinklig. Aus dem Kathethensatz folgt:

$$|Op|^2 = |Ow| \cdot |Oz|$$

$$1^2 = |w| \cdot |z|$$

$$|w| = 1/|z|$$

## Aufgabe 5.16

Berechne  $f(f(z))$ .

$f(f(z))$

## Aufgabe 5.16

Berechne  $f(f(z))$ .

$$f(f(z)) = f(1/\bar{z})$$

## Aufgabe 5.16

Berechne  $f(f(z))$ .

$$f(f(z)) = f(1/\bar{z}) = 1/\overline{1/\bar{z}}$$

## Aufgabe 5.16

Berechne  $f(f(z))$ .

$$f(f(z)) = f(1/\bar{z}) = 1/\overline{1/\bar{z}} = \bar{\bar{z}}$$



## Aufgabe 5.16

Berechne  $f(f(z))$ .

$$f(f(z)) = f(1/\bar{z}) = 1/\overline{1/\bar{z}} = \bar{\bar{z}} = z$$

## Aufgabe 5.16

Berechne  $f(f(z))$ .

$$f(f(z)) = f(1/\bar{z}) = 1/\overline{1/\bar{z}} = \bar{\bar{z}} = z$$

Eine Funktion  $f$  mit der Eigenschaft  $f(f(z)) = z$  stimmt mit ihrer Umkehrfunktion  $f^{-1}$  überein und wird **Involution** genannt.

## Aufgabe 5.17

Welches ist das Bild eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $M$  im Ursprung und dem Radius  $r$ ?

Kreis mit  $M' = O(0|0)$  und  $r' = \frac{1}{r}$

## Aufgabe 5.18

Welches ist das Bild eines Strahls, der vom Ursprung ausgeht?

Derselbe Strahl (wegen  $f(r \cdot \text{cis } \varphi) = \frac{1}{r} \cdot \text{cis } \varphi$ )

## Aufgabe 5.19

Welches sind die Fixpunkte dieser Abbildung?

$$f(z) = 1/\bar{z} = z$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z| = 1 \text{ (Punkte auf dem Einheitskreis)}$$

## Aufgabe 5.20

Wohin werden die Punkte innerhalb des Einheitskreises abgebildet?

Wohin die Punkte ausserhalb des Einheitskreises?

Punkte innerhalb des Einheitskreises werden ausserhalb abgebildet und umgekehrt.

## Zusammenfassung

- ▶ Kreise, die nicht durch den Ursprung gehen, werden auf Kreise abgebildet, die nicht durch den Ursprung gehen.

## Zusammenfassung

- ▶ Kreise, die nicht durch den Ursprung gehen, werden auf Kreise abgebildet, die nicht durch den Ursprung gehen.
- ▶ Geraden durch den Ursprung werden auf sich selbst abgebildet (Fixgeraden aber keine Fixpunktgeraden).



## Zusammenfassung

- ▶ Kreise, die nicht durch den Ursprung gehen, werden auf Kreise abgebildet, die nicht durch den Ursprung gehen.
- ▶ Geraden durch den Ursprung werden auf sich selbst abgebildet (Fixgeraden aber keine Fixpunktgeraden).
- ▶ Geraden, die nicht durch den Ursprung gehen, werden auf Kreise abgebildet, die durch den Ursprung gehen.

## Zusammenfassung

- ▶ Kreise, die nicht durch den Ursprung gehen, werden auf Kreise abgebildet, die nicht durch den Ursprung gehen.
- ▶ Geraden durch den Ursprung werden auf sich selbst abgebildet (Fixgeraden aber keine Fixpunktgeraden).
- ▶ Geraden, die nicht durch den Ursprung gehen, werden auf Kreise abgebildet, die durch den Ursprung gehen.
- ▶ Wegen  $f(f(z)) = z$ , d.h. wegen  $f^{-1}(z) = f(z)$ , werden Kreise, die durch den Ursprung gehen, auf Geraden abgebildet, die nicht durch den Ursprung gehen.

Damit man sich diese Eigenschaften der Kreisspiegelung einfacher merken kann, empfiehlt es sich, die Abbildung  $f(z) = 1/\bar{z}$  auch für  $z = 0$  zu definieren. Dazu fügt man der Gaußschen Zahlenebene einen **unendlich fernen Punkt**  $w = \infty$  hinzu, der das Bild von  $z = 0$  sein soll.

Damit man sich diese Eigenschaften der Kreisspiegelung einfacher merken kann, empfiehlt es sich, die Abbildung  $f(z) = 1/\bar{z}$  auch für  $z = 0$  zu definieren. Dazu fügt man der Gaußschen Zahlenebene einen **unendlich fernen Punkt**  $w = \infty$  hinzu, der das Bild von  $z = 0$  sein soll.

Umgekehrt muss dann  $f(\infty) = 0$  gelten. Die Abbildung  $f(z) = 1/\bar{z}$  ist dann eine Abbildung **der erweiterten Zahlenebene** auf sich selbst.

Damit man sich diese Eigenschaften der Kreisspiegelung einfacher merken kann, empfiehlt es sich, die Abbildung  $f(z) = 1/\bar{z}$  auch für  $z = 0$  zu definieren. Dazu fügt man der Gaußschen Zahlenebene einen **unendlich fernen Punkt**  $w = \infty$  hinzu, der das Bild von  $z = 0$  sein soll.

Umgekehrt muss dann  $f(\infty) = 0$  gelten. Die Abbildung  $f(z) = 1/\bar{z}$  ist dann eine Abbildung **der erweiterten Zahlenebene** auf sich selbst.

Die Ergänzung hat zur Folge, dass das Bild einer Geraden, die durch den Ursprung geht, ein voller durch den Ursprung gehender Kreis ist. Fasst man Geraden als Kreise auf, die durch den Fernpunkt  $\infty$  gehen, so kann man die Eigenschaften wie folgt zusammenfassen:

## Satz

Die Spiegelung am Einheitskreis  $f(z) = 1/\bar{z}$  ist **kreistreue**, d. h. sie bildet jeden Kreis  $k$  der erweiterten Zahlenebene wieder auf einen Kreis  $k'$  ab. Enthält  $k$  den Punkt  $z = 0$ , so geht  $k'$  durch den Punkt  $w = \infty$  und umgekehrt.

## Aufgabe 5.21

Bestimme das Bild  $k'$  der Kurve  $k: z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} = 0$  unter der Funktion  $f(z) = 1/\bar{z}$ .

## Aufgabe 5.21

Bestimme das Bild  $k'$  der Kurve  $k: z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} = 0$  unter der Funktion  $f(z) = 1/\bar{z}$ .

$$w = 1/\bar{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w}$$



## Aufgabe 5.21

Bestimme das Bild  $k'$  der Kurve  $k: z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} = 0$  unter der Funktion  $f(z) = 1/\bar{z}$ .

$$w = 1/\bar{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w}$$

$$k': \frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{1}{w} + 4 \cdot \frac{1}{\bar{w}} + 4 \cdot \frac{1}{w} = 0$$

## Aufgabe 5.21

Bestimme das Bild  $k'$  der Kurve  $k: z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} = 0$  unter der Funktion  $f(z) = 1/\bar{z}$ .

$$w = 1/\bar{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w}$$

$$k': \frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{1}{w} + 4 \cdot \frac{1}{\bar{w}} + 4 \cdot \frac{1}{w} = 0$$

$$k': 1 + 4w + 4\bar{w} = 0$$

## Aufgabe 5.21

Bestimme das Bild  $k'$  der Kurve  $k: z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} = 0$  unter der Funktion  $f(z) = 1/\bar{z}$ .

$$w = 1/\bar{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w}$$

$$k': \frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{1}{w} + 4 \cdot \frac{1}{\bar{w}} + 4 \cdot \frac{1}{w} = 0$$

$$k': 1 + 4w + 4\bar{w} = 0$$

$$k': 4\bar{w} + 4w + 1 = 0 \quad (\text{Gerade nicht durch } O)$$

## Aufgabe 5.22

Bestimme das Bild  $k'$  der Kurve  $k: z + \bar{z} - 8 = 0$  unter der Funktion  $f(z) = 1/\bar{z}$ .

## Aufgabe 5.22

Bestimme das Bild  $k'$  der Kurve  $k: z + \bar{z} - 8 = 0$  unter der Funktion  $f(z) = 1/\bar{z}$ .

$$w = 1/\bar{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w}$$

## Aufgabe 5.22

Bestimme das Bild  $k'$  der Kurve  $k: z + \bar{z} - 8 = 0$  unter der Funktion  $f(z) = 1/\bar{z}$ .

$$w = 1/\bar{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w}$$

$$k': \frac{1}{\bar{w}} + \frac{1}{w} - 8 = 0$$

## Aufgabe 5.22

Bestimme das Bild  $k'$  der Kurve  $k: z + \bar{z} - 8 = 0$  unter der Funktion  $f(z) = 1/\bar{z}$ .

$$w = 1/\bar{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w}$$

$$k': \frac{1}{\bar{w}} + \frac{1}{w} - 8 = 0$$

$$k': w + \bar{w} - 8 \cdot w\bar{w} = 0$$

## Aufgabe 5.22

Bestimme das Bild  $k'$  der Kurve  $k: z + \bar{z} - 8 = 0$  unter der Funktion  $f(z) = 1/\bar{z}$ .

$$w = 1/\bar{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\bar{w}$$

$$k': \frac{1}{\bar{w}} + \frac{1}{w} - 8 = 0$$

$$k': w + \bar{w} - 8 \cdot w\bar{w} = 0$$

$$k': w\bar{w} - \frac{1}{8}w - \frac{1}{8}\bar{w} = 0 \quad (\text{Kreis durch Ursprung})$$



## Gerade

Koordinatenform:  $Ax + By + C = 0$

mit  $A, B, C \in \mathbb{R}$

komplexe Form:  $\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$

mit  $b = A + Bi$  und  $c = 2C$

Parameterform:  $z(t) = a + t \cdot v$

mit  $t \in \mathbb{R}$  und  $a, v \in \mathbb{C}$

## Kreis

Betragsform:  $|z - m| = r$   
mit  $z, m \in \mathbb{C}$  und  $r \in \mathbb{R}^+$

betragsfreie Form:  $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + c = 0$   
mit  $c = m\bar{m} - r^2 \in \mathbb{R}$

Parameterform:  $z(\varphi) = m + r \cdot \text{cis } \varphi$   
mit  $m \in \mathbb{C}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $r \in \mathbb{R}^+$

Es sei

$$f_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

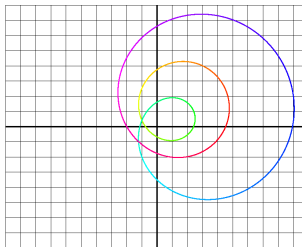
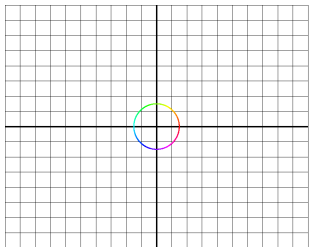
eine Polynomfunktion vom Grad  $n$  mit komplexen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , wobei  $a_n \neq 0$ .

**Fundamentalsatz der Algebra:** Die Gleichung  $f_n(z) = 0$  besitzt mindestens eine Lösung  $z_0$  in  $\mathbb{C}$ .

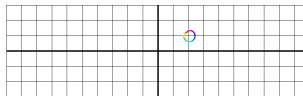
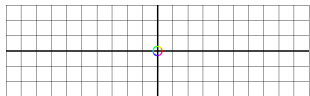
## Begründung

$$f_3(z) = z^3 - iz^2 - \left(\frac{1}{2} - i\right)z + (2 + i)$$

Das Bild eines hinreichend grossen Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ist eine geschlossene Kurve, die den Nullpunkt in der Bildebene  $n$ -mal umschlingt.



Das Bild eines hinreichend kleinen Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ist eine in der Nähe des Punktes  $f_n(0) = a_0$  liegende Kurve, die den Nullpunkt der Bildebene nicht umschlingt.



Wenn also der Radius des Originalkreises mit einem hinreichend grossen Wert beginnend gegen Null abnimmt, wird die Bildkure deformiert und es muss mindestens einmal die Situation eintreten, in der die Bildkurve durch den Nullpunkt geht. Für diese Situation gibt es einen auf dem Originalkreis liegenden Punkt  $z_0$  der von  $f_n(z)$  auf den Nullpunkt der Bildebene abgebildet wird.

